Correctif de la séance 4
Simulation de l'interaction $e^+e^- \to q\bar{q}g$

1. Paramétrisation de l'espace des phases pour une interaction $1+2 \to 3+4+5$:

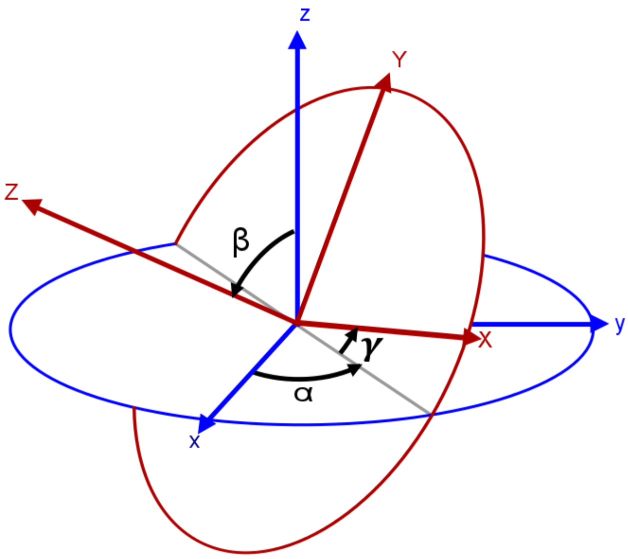
a) Pour effectuer le changement de variables indiqué, commençons par exprimer d^3k_i : en coordonnées sphériques,
$$\mathrm{d}^3k_i = E_i^2\,\mathrm{d}E_i\,\mathrm{d}\Omega_i.$$
Puisque $\mathrm{d}x_i = \frac{2}{\sqrt{s}}\mathrm{d}E_i$, on a :
$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3k_i &= \frac{E_i^2}{2}\sqrt{s}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}\Omega_i\\ &= \frac{s}{4}x_i^2\cdot\frac{\sqrt{s}}{2}\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}\Omega_i,\end{aligned}$$
ce qui donne :
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3k_i}{(2\pi)^3 2E_i} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{s}{16}\frac{x_i^2\sqrt{s}}{E_i}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}\Omega_i\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{s}{16}\frac{x_i^2\sqrt{s}}{x_i\sqrt{s}}\cdot 2\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}\Omega_i\\ &= \frac{s}{8}\frac{1}{(2\pi)^3}x_i\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}\Omega_i\,.\end{aligned}$$

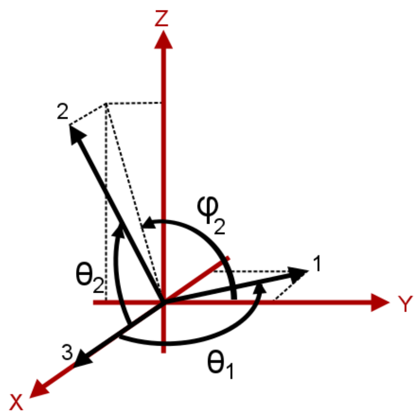
b) Initialement, le faisceau d'électrons arrive selon $\vec{u}_z$ et le faisceau de positrons selon $-\vec{u}_z$ dans le référentiel du laboratoire. Pour simplifier les calculs, on se place dans un autre référentiel défini par 3 rotations successives à partir du référentiel du laboratoire, avec des angles qui correspondent aux angles d'Euler :

- une rotation d'angle α autour de l'axe z ; puis
- une rotation d'angle β autour du nouvel axe x ; puis
- une rotation d'angle γ autour du nouvel axe z.

Il est connu que n'importe quelle rotation dans l'espace à 3 dimensions peut se décomposer en 3 rotations d'angles α, β et γ, on peut donc choisir ces 3 angles tels que le référentiel sera plus pratique pour décrire les impulsions des particules dans l'état final. Ici, on impose que dans le référentiel (X, Y, Z) défini par les angles d'Euler :

- la particule 3 va dans la direction X ;
- la particule 1 est comprise dans le plan XY, avec $Y \geq 0$ (ce qui fixe l'axe Y) ;
- la particule 2 ne donne aucune contrainte sur le reste du repère puisqu'on a déjà que le repère est dextrogyre ($\vec{u}_X \times \vec{u}_Y = \vec{u}_Z$).





L'avantage de ce choix de changement de référentiel est qu'il ne change pas les normes des impulsions puisqu'il ne concerne que des rotations. Par conséquent, on peut directement exprimer $\mathrm{d}\Phi_3$ dans le nouveau référentiel (le jacobien vaut 1 !).
On veut tout d'abord exprimer le facteur delta de Dirac. Puisque l'électron et le positron sont de même énergie et vont dans des directions opposées, $p_1 + p_2 = \left(2E, \vec{0}\right) = \left(\sqrt{s}, \vec{0}\right)$ (où E est l'énergie d'une des particules incidentes) et on a :

$$\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) = \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2 - E_3)\, \delta^{(3)}\left(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3\right).$$

Exprimons les vecteurs $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ et $\vec{k}_3$ dans le nouveau référentiel. Puisque la particule 1 est comprise dans le plan XY et que θ_1 est l'angle dans le plan XY par rapport à l'axe X, on a :

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= (k_1 \cos\theta_1, k_1 \sin\theta_1, 0)\\ &= \frac{\sqrt{s}}{2}(x_1 \cos\theta_1, x_1 \sin\theta_1, 0)\end{aligned}$$

(par définition de x_1 : puisqu'on néglige toutes les masses, les énergies sont égales aux normes des impulsions). Pour la particule 2, on aura besoin de θ_2 comme angle polaire par rapport à l'axe X, et de ϕ_2 comme angle azimutal dans le plan XZ :

$$\vec{k}_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(x_2 \cos\theta_2, x_2 \sin\theta_2 \cos\phi_2, x_2 \sin\theta_2 \sin\phi_2).$$

Le vecteur $\vec{k}_3$ est le plus facile à exprimer puisqu'il est dirigé selon l'axe X :

$$\vec{k}_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}(x_3, 0, 0).$$

On peut donc réexprimer les 4 composantes des fonctions δ :

$$\begin{aligned}\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) = \delta\left(\sqrt{s} - \frac{\sqrt{s}}{2}(x_1 + x_2 + x_3)\right) \cdot \delta\left(\frac{\sqrt{s}}{2}(x_1 \cos\theta_1 + x_2 \cos\theta_2 + x_3)\right) \cdot \\ \delta\left(\frac{\sqrt{s}}{2}(x_1 \sin\theta_1 + x_2 \sin\theta_2 \cos\phi_2)\right) \cdot \delta\left(\frac{\sqrt{s}}{2}(x_2 \sin\theta_2 \sin\phi_2)\right).\end{aligned}$$

On peut faire sortir des facteurs $\sqrt{s}/2$ de chaque terme, puisque :

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x).$$

Cela fait donc sortir un facteur $16/s^2$ devant les delta de Dirac.
Il reste à traiter les éléments différentiels $\mathrm{d}\Omega_i$ pour chaque particule. Pour cela, il faut se souvenir qu'une position est toujours décrite par une distance, un angle polaire (entre 0 et π) et un angle azimutal (entre 0 et 2π), ces deux dernières coordonnées permettant de déterminer $\mathrm{d}\Omega_i$. Il faut donc identifier l'angle azimutal et l'angle polaire pour chaque particule.
Pour la particule 2, l'angle polaire est évidemment θ_2 et l'angle azimutal est ϕ_2, donc on a directement :

$$\mathrm{d}\Omega_2 = \mathrm{d}\cos\theta_2\,\mathrm{d}\phi_2\,.$$

Pour la particule 1, l'angle polaire est θ_1. L'angle azimutal est situé dans le plan XY ; on peut se convaincre qu'il s'agit de l'angle d'Euler α. On a donc :

$$\mathrm{d}\Omega_1 = \mathrm{d}\cos\theta_1\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Pour la particule 3, l'angle polaire est l'angle d'Euler β (qui est bien un angle polaire puisqu'il est compris entre 0 et π), et l'angle azimutal est γ (puisque c'est la rotation de γ qui amène l'axe X sur l'axe de la particule). On a donc :

$$\mathrm{d}\Omega_3 = \mathrm{d}\cos\beta\,\mathrm{d}\gamma\,.$$

Au final, en regroupant tous les résultats obtenus, on arrive à l'expression de $\mathrm{d}\Phi_3$ en fonction des 6 angles et des variables x_i :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi_3 = {}& \frac{1}{(2\pi)^5}\left(\frac{s}{8}\right)^3\frac{16}{s^2}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\cos\beta\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}\cos\theta_1\,\mathrm{d}\cos\theta_2\,\mathrm{d}\phi_2\;\delta(2-x_1-x_2-x_3)\,x_1x_2x_3\\ &\times\delta(x_2\sin\theta_2\sin\phi_2)\,\delta(x_2\sin\theta_2\cos\phi_2+x_1\sin\theta_1)\,\delta(x_3+x_2\cos\theta_2+x_1\cos\theta_1).\end{aligned}$$

c) On a 9 variables et 4 fonctions delta. On peut donc intégrer sur 4 variables afin de rester avec une fonction de 5 variables sans fonction delta. On décide d'intégrer sur x_3, $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$ et ϕ_2, afin de rester uniquement avec x_1, x_2 et les 3 angles d'Euler α, β (ou $\cos\beta$) et γ.
L'intégration revient à imposer 4 conditions, à savoir que l'argument de chaque fonction delta doit valoir 0. On impose donc les 4 conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 &= 2-x_1-x_2-x_3\\ 0 &= x_1\cos\theta_1+x_2\cos\theta_2+x_3\\ 0 &= x_1\sin\theta_1+x_2\sin\theta_2\cos\phi_2\\ 0 &= x_2\sin\theta_2\sin\phi_2.\end{cases}$$

La première équation du système se ramène immédiatement à la condition

$$\boxed{x_3 = 2-x_1-x_2}.$$

La quatrième équation se ramène à $x_2=0$, $\sin\theta_2=0$ ou $\sin\phi_2=0$. $x_2=0$ n'est évidemment pas possible, cela reviendrait à avoir uniquement deux particules dans l'état final. $\sin\theta_2=0$ n'est pas possible non plus : en effet, cela signifierait que les particules 2 et 3 seraient sur un même axe. Il serait alors impossible de compenser la composante de la particule 1 transverse à cet axe, et on ne pourrait pas avoir conservation de l'impulsion. Il faut donc que $\sin\phi_2=0$. Cela laisse deux possibilités : $\phi_2=0$ ou $\phi_2=\pi$. Mais si on avait $\phi_2=0$, on aurait trois particules dans le même hémisphère, ce qui serait également en contradiction avec la conservation de l'impulsion. Il faut donc que

$$\boxed{\phi_2=\pi}.$$

(Notons que cela signifie que les trois particules finales sont produites dans un même plan, ici le plan XY.)
Il nous reste un système de deux équations à deux inconnues à résoudre, en termes des variables

θ_1 et θ_2 mais que l'on aimerait réexprimer en termes de $\cos\theta_1$ et $\cos\theta_2$ uniquement. En se souvenant que $\phi_2 = \pi$, la troisième équation devient :

$$\begin{aligned} & 0 = x_1 \sin\theta_1 - x_2 \sin\theta_2 \\ \Rightarrow\quad & x_1 \sin\theta_1 = x_2 \sin\theta_2 \\ \Rightarrow\quad & x_1^2 \left(1 - \cos^2\theta_1\right) = x_2^2 \left(1 - \cos^2\theta_2\right) \\ \Rightarrow\quad & x_2^2 \cos^2\theta_2 = x_2^2 - x_1^2 \left(1 - \cos^2\theta_1\right) \end{aligned}$$

En partant de la deuxième équation, cela donne :

$$\begin{aligned} & x_3 + x_1 \cos\theta_1 = -x_2 \cos\theta_2 \\ \Rightarrow\quad & x_3^2 + 2x_3x_1\cos\theta_1 + x_1^2\cos^2\theta_1 = x_2^2\cos^2\theta_2 \\ \Rightarrow\quad & x_3^2 + 2x_3x_1\cos\theta_1 + x_1^2\cos^2\theta_1 = x_2^2 - x_1^2 + x_1^2\cos^2\theta_1 \\ \Rightarrow\quad & 2x_3x_1\cos\theta_1 = x_2^2 - x_1^2 - x_3^2 \\ \Rightarrow\quad & \boxed{\cos\theta_1 = -\frac{x_1^2 + x_3^2 - x_2^2}{2x_1x_3}}. \end{aligned}$$

(Notons que l'on aurait encore pu utiliser la première relation encadrée pour remplacer x_3 par son expression en termes de x_1 et x_2. On a préféré laisser l'équation de cette manière pour des raisons de lisibilité.)
Finalement, en réinjectant cette expression dans la deuxième équation du système, on a :

$$\begin{aligned} & \cos\theta_2 = \frac{-x_3}{x_2} - \frac{x_1}{x_2}\cos\theta_1 \\ \Rightarrow\quad & \cos\theta_2 = \frac{-x_3}{x_2} - \frac{x_1^2 + x_3^2 - x_2^2}{2x_2x_3} \\ \Rightarrow\quad & \cos\theta_2 = \frac{-x_3^2 + x_1^2 + x_3^2 - x_2^2}{2x_2x_3} \\ \Rightarrow\quad & \boxed{\cos\theta_2 = -\frac{x_2^2 + x_3^2 - x_1^2}{2x_2x_3}}. \end{aligned}$$

Les 4 équations encadrées donnent des conditions qui seront toujours remplies dans la suite du calcul. Cependant, il reste encore une étape à faire avant d'intégrer sur les 4 variables car l'intégrale des fonctions ne vaut pas 1 : les arguments des fonctions delta ne sont pas directement les variables sur lesquelles on intègre (à savoir : x_3, $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$ et ϕ). Il faut donc faire un changement de variables en 4 dimensions pour que les arguments des fonctions delta soient exactement les variables d'intégration. On appelle (par manque d'imagination) ces 4 nouvelles variables A, B, C et D ; elles sont définies par les arguments des fonctions delta :

$$\begin{cases} A & = 2 - x_1 - x_2 - x_3 \\ B & = x_1\cos\theta_1 + x_2\cos\theta_2 + x_3 \\ C & = x_1\sin\theta_1 + x_2\sin\theta_2\cos\phi_2 \\ D & = x_2\sin\theta_2\sin\phi_2. \end{cases}$$

Il faut alors multiplier l'expression de $\mathrm{d}\Phi_3$ par l'inverse du jacobien du changement de variables, défini par :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial x_3} & \frac{\partial B}{\partial x_3} & \frac{\partial C}{\partial x_3} & \frac{\partial D}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A}{\partial\cos\theta_1} & \frac{\partial B}{\partial\cos\theta_1} & \frac{\partial C}{\partial\cos\theta_1} & \frac{\partial D}{\partial\cos\theta_1} \\ \frac{\partial A}{\partial\cos\theta_2} & \frac{\partial B}{\partial\cos\theta_2} & \frac{\partial C}{\partial\cos\theta_2} & \frac{\partial D}{\partial\cos\theta_2} \\ \frac{\partial A}{\partial\phi_2} & \frac{\partial B}{\partial\phi_2} & \frac{\partial C}{\partial\phi_2} & \frac{\partial D}{\partial\phi_2} \end{vmatrix}.$$

On a donc 16 dérivées partielles à calculer. La plupart sont triviales à partir des expressions plus haut. On notera que la condition $\phi_2 = \pi$ permet de simplifier plusieurs résultats de ces dérivations, et qu'on a l'identité :

$$\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\cos\theta} = \cos\theta\cdot\frac{1}{-\sin\theta} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial x_3} &= -1 & \frac{\partial C}{\partial x_3} &= 0\\
\frac{\partial A}{\partial\cos\theta_1} &= 0 & \frac{\partial C}{\partial\cos\theta_1} &= -x_1\cdot\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\\
\frac{\partial A}{\partial\cos\theta_2} &= 0 & \frac{\partial C}{\partial\cos\theta_2} &= -x_2\cdot\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}\cdot\cos\phi_2 = x_2\cdot\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}\\
\frac{\partial A}{\partial\phi_2} &= 0 & \frac{\partial C}{\partial\phi_2} &= -x_2\sin\theta_2\sin\phi_2 = 0\\
\frac{\partial B}{\partial x_3} &= 1 & \frac{\partial D}{\partial x_3} &= 0\\
\frac{\partial B}{\partial\cos\theta_1} &= x_1 & \frac{\partial D}{\partial\cos\theta_1} &= 0\\
\frac{\partial B}{\partial\cos\theta_2} &= x_2 & \frac{\partial D}{\partial\cos\theta_2} &= -x_2\cdot\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}\cdot\sin\phi_2 = 0\\
\frac{\partial B}{\partial\phi_2} &= 0 & \frac{\partial D}{\partial\phi_2} &= x_2\sin\theta_2\cos\phi_2 = -x_2\sin\theta_2.
\end{aligned}$$

Le jacobien se calcule donc comme :

$$\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & x_1 & -x_1\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} & 0\\ 0 & x_2 & x_2\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -x_2\sin\theta_2 \end{vmatrix}\\
&= +\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0\\ 0 & x_1 & \frac{-x_1}{\tan\theta_1}\\ 0 & x_2 & \frac{x_2}{\tan\theta_2} \end{vmatrix}\cdot(-x_2\sin\theta_2)\\
&= -x_2\sin\theta_2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} x_1 & \frac{-x_1}{\tan\theta_1}\\ x_2 & \frac{x_2}{\tan\theta_2} \end{vmatrix}\\
&= x_1x_2^2\sin\theta_2\left(\frac{1}{\tan\theta_2}+\frac{1}{\tan\theta_1}\right)\\
&= x_1x_2^2\cdot\left(\cos\theta_2+\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\cos\theta_1\right)\\
&= x_1x_2^2\cdot\left(-\frac{x_2^2+x_3^2-x_1^2}{2x_2x_3}-\frac{x_1^2+x_3^2-x_2^2}{2x_1x_3}\cdot\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\right),
\end{aligned}$$

en utilisant les relations trouvées plus haut pour $\cos\theta_1$ et $\cos\theta_2$. Il reste encore à exprimer le rapport $\sin\theta_1/\sin\theta_2$: pour cela, remarquons que

$$\begin{aligned}
\sin\theta_2 &= \sqrt{1-\cos^2\theta_2}\\
&= \sqrt{1-\left(\frac{x_2^2+x_3^2-x_1^2}{2x_2x_3}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2x_2x_3}\sqrt{4x_2^2x_3^2-x_1^4-x_2^4-x_3^4-2x_2^2x_3^2+2x_1^2x_3^2+2x_1^2x_2^2}\\
&= \frac{1}{2x_2x_3}\sqrt{-x_1^4-x_2^4-x_3^4+2x_2^2x_3^2+2x_1^2x_3^2+2x_1^2x_2^2}.
\end{aligned}$$

De même, on trouve :

$$\begin{aligned}
\sin\theta_1 &= \sqrt{1-\left(\frac{x_1^2+x_3^2-x_2^2}{2x_1x_3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2x_1x_3}\sqrt{-x_1^4-x_2^4-x_3^4+2x_1^2x_3^2+2x_1^2x_2^2+2x_2^2x_3^2},
\end{aligned}$$

ce qui implique tout simplement

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{x_1}{x_2},$$

et donc :

$$\begin{aligned}
J &= -x_1x_2^2\cdot\left(\frac{x_2^2+x_3^2-x_1^2}{2x_2x_3}+\frac{x_1^2+x_3^2-x_2^2}{2x_2x_3}\right) \\
&= -\frac{x_1x_2}{x_3}\cdot\left(\frac{2x_3^2}{2}\right) \\
&= -x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

Donc, le facteur par lequel il faut multiplier toute l'expression pour tenir compte du changement de variables est :

$$\left|\frac{1}{J}\right| = \frac{1}{x_1x_2x_3},$$

qui se simplifie donc avec le facteur $x_1x_2x_3$ déjà présent dans l'expression de $\mathrm{d}\Phi_3$.
On peut donc enfin intégrer l'expression de $\mathrm{d}\Phi_3$ obtenue au point précédent, ce qui donne :

$$\mathrm{d}\Phi_3 = \frac{s}{32}\cdot\frac{1}{(2\pi)^5}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}\cos\beta\,\mathrm{d}\gamma\,,$$

en se souvenant qu'on a toujours également les 4 conditions encadrées ci-dessus.

d) Pour exprimer ces différents produits, il faut estimer les impulsions p_i et k_i dans le même référentiel. Lors du point b), on a déjà exprimé les vecteurs $\vec{k}_i$ dans la base (X,Y,Z) (sachant que la composante énergie du quadrivecteur n'est pas modifiée par le changement de coordonnées, qui n'est constitué que de rotations). Il reste à exprimer les quadrivecteurs des particules incidentes dans le système (X,Y,Z) Puisqu'elles vont selon $\vec{u}_z$ et $-\vec{u}_z$, il faut donc uniquement exprimer le vecteur $\vec{u}_z$ du système du laboratoire dans le système (X,Y,Z). Pour cela, souvenons-nous de la manière dont on passe d'un référentiel à l'autre, par 3 rotations successives :

$$\begin{tikzcd}
(x,y,z) \arrow[r, bend left, "\text{Rotation } \alpha \text{ autour de } z"] & (x',y',z') \arrow[r, bend left, "\text{Rotation } \beta \text{ autour de } x'"] & (x'',y'',z'') \arrow[r, bend left, "\text{Rotation } \gamma \text{ autour de } z''"] & (X,Y,Z)
\end{tikzcd}$$

Le vecteur $\vec{u}_z$ se transforme donc comme :

$$\begin{tikzcd}
(0,0,1) \arrow[r, bend left, "\text{Rotation } \alpha \text{ autour de } z"] & (0,0,1) \arrow[r, bend left, "\text{Rotation } \beta \text{ autour de } x'"] & (0,\sin\beta,\cos\beta) \arrow[r, bend left, "\text{Rotation } \gamma \text{ autour de } z''"] & (\sin\beta\sin\gamma,\sin\beta\cos\gamma,\cos\beta)
\end{tikzcd}$$

Donc,

$$\vec{u}_z = (\sin\beta\sin\gamma,\sin\beta\cos\gamma,\cos\beta)\quad\text{dans }(X,Y,Z),$$

Ce qui implique que

$$\vec{p}_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}(\sin\beta\sin\gamma,\sin\beta\cos\gamma,\cos\beta)\quad\text{et}\quad\vec{p}_2 = -\frac{\sqrt{s}}{2}(\sin\beta\sin\gamma,\sin\beta\cos\gamma,\cos\beta).$$

On peut ainsi effectuer facilement les produits scalaires :

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 \cdot \vec{k}_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2}\sin\beta\sin\gamma \cdot \frac{\sqrt{s}}{2}x_1\cos\theta_1 + \frac{\sqrt{s}}{2}\sin\beta\cos\gamma \cdot \frac{\sqrt{s}}{2}x_1\sin\theta_1 \\ &= \frac{s}{4}x_1\sin\beta(\sin\gamma\cos\theta_1 + \cos\gamma\sin\theta_1) \\ &= \frac{s}{4}x_1\sin\beta(\sin(\gamma+\theta_1))\end{aligned}$$

(en utilisant une relation trigonométrique), ce qui donne :

$$p_{\frac{1}{2}} \cdot k_1 = \frac{s}{4}x_1\left(1 \mp \sin\beta\sin(\gamma+\theta_1)\right).$$

De même, on trouve :

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 \cdot \vec{k}_2 &= \frac{s}{4}x_2(\sin\beta\sin\gamma\cos\theta_2 + \sin\beta\cos\gamma\sin\theta_2\cos\phi_2 + \cos\beta\sin\theta_2\sin\phi_2) \\ &= \frac{s}{4}x_2(\sin\beta\sin\gamma\cos\theta_2 - \sin\beta\cos\gamma\sin\theta_2) \\ &= \frac{s}{4}x_2\sin\beta(\sin(\gamma-\theta_2)),\end{aligned}$$

puisque $\phi_2 = \pi$. On trouve donc :

$$p_{\frac{1}{2}} \cdot k_2 = \frac{s}{4}x_2\left(1 \mp \sin\beta\sin(\gamma-\theta_2)\right).$$

Finalement,

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{k}_3 = \frac{s}{4}x_3 \cdot \sin\beta\sin\gamma,$$

ce qui donne :

$$p_{\frac{1}{2}} \cdot k_3 = \frac{s}{4}x_3\left(1 \mp \sin\beta\sin\gamma\right).$$

Notons que θ_1, θ_2 et x_3 dépendent toujours implicitement des autres variables par les relations que l'on a trouvées plus haut.

2. Calcul de la section efficace $e^+e^- \to q\bar{q}g$:

a) Remarquons tout d'abord que la section efficace s'exprime comme

$$\mathrm{d}\sigma = \overline{|\mathcal{M}|^2}\frac{J}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}}\,\mathrm{d}\Phi_3\,,$$

en termes de $\mathrm{d}\Phi_3$ que nous avons calculé au premier exercice.
(<u>Remarque :</u> comme à la séance précédente, il peut sembler incorrect que l'on ait pu sortir $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ de l'intégrale lorsqu'on a intégré sur les 4 variables à l'exercice 1, alors que $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ dépend encore de ces variables. Cependant, cela fonctionne dans ce cas car on a intégré sur des fonctions delta : il suffit de se souvenir que les 4 conditions encadrées plus haut sont tout le temps d'application.)
Avant toute chose, traitons le facteur $\frac{J}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-(m_1m_2)^2}}$. Tout d'abord, $J = 1$ car toutes les particules de l'état final sont différentes. Évaluons le terme au dénominateur dans l'approximation des masses nulles :

$$\begin{aligned}(p_1\cdot p_2)^2 - (m_1m_2)^2 &\sim (p_1\cdot p_2)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\cdot\frac{\sqrt{s}}{2} - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_2\right)^2 \\ &= \left(\frac{s}{4}+\frac{s}{4}\right)^2 \\ &= \frac{s^2}{4}.\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\frac{J}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-(m_1m_2)^2}}=\frac{1}{4\sqrt{\frac{s^2}{4}}}=\frac{1}{2s}.$$

En combinant avec le résultat de l'exercice 1, on trouve donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}\cos\beta\,\mathrm{d}\gamma}&=\overline{|\mathcal{M}|^2}\cdot\frac{1}{2s}\cdot\frac{s}{32}\cdot\frac{1}{(2\pi)^5}\\&=8C_F\alpha^2\alpha_sN_c\,Q_q^2\frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\frac{8}{2\cdot 32}\left\{\frac{(p_{e^+}\cdot p_q)^2+(p_{e^+}\cdot p_{\bar q})^2+(p_{e^-}\cdot p_q)^2+(p_{e^-}\cdot p_{\bar q})^2}{(p_{e^+}\cdot p_{e^-})(p_q\cdot p_g)(p_{\bar q}\cdot p_g)}\right\}\\&=\frac{C_F\alpha^2\alpha_sN_c\,Q_q^2}{4\pi^2}\left\{\frac{(p_{e^+}\cdot p_q)^2+(p_{e^+}\cdot p_{\bar q})^2+(p_{e^-}\cdot p_q)^2+(p_{e^-}\cdot p_{\bar q})^2}{(p_{e^+}\cdot p_{e^-})(p_q\cdot p_g)(p_{\bar q}\cdot p_g)}\right\}.\end{aligned}$$

Pour arriver à l'expression souhaitée, il suffit d'encore remarquer que $p_{e^+}\cdot p_{e^-}=s/2$. On trouve ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}\cos\beta\,\mathrm{d}\gamma}=\frac{C_F\alpha^2\alpha_sN_c\,Q_q^2}{2\pi^2}\left\{\frac{(p_{e^+}\cdot p_q)^2+(p_{e^+}\cdot p_{\bar q})^2+(p_{e^-}\cdot p_q)^2+(p_{e^-}\cdot p_{\bar q})^2}{s(p_q\cdot p_g)(p_{\bar q}\cdot p_g)}\right\}.$$

b) Pour arriver à l'expression finale, il reste à effectuer les 6 produits scalaires de l'expression ci-dessus. Ceux du numérateur ont déjà été faits au point d) de l'exercice 1 ; il reste ceux du dénominateur. Si on appelle $1\equiv q$, $2\equiv\bar q$ et $3\equiv g$, on obtient en utilisant les expressions des quadrivecteurs calculés au point b) de l'exercice 1 :

$$\begin{aligned}p_q\cdot p_g&=\frac{s}{4}(x_1x_3-x_1x_3\cos\theta_1)\\&=\frac{s}{4}x_1x_3(1-\cos\theta_1)\\&=\frac{s}{4}x_1x_3\left(1+\frac{x_1^2+x_3^2-x_2^2}{2x_1x_3}\right)\\&=\frac{s}{8}\left(2x_1x_3+x_1^2+x_3^2-x_2^2\right)\\&=\frac{s}{8}\left((x_1+x_3)^2-x_2^2\right)\\&=\frac{s}{8}\left((2-x_2)^2-x_2^2\right)\\&=\frac{s}{8}(4-4x_2)\\&=\frac{s}{2}(1-x_2)\end{aligned}$$

(où on a utilisé la relation encadrée entre x_1, x_2 et x_3 trouvée au point c) de l'exercice 1). De façon similaire, on trouve :

$$\begin{aligned}p_{\bar q}\cdot p_g&=\frac{s}{4}x_2x_3\left(1+\frac{x_2^2+x_3^2-x_1^2}{2x_2x_3}\right)\\&=\frac{s}{2}(1-x_1).\end{aligned}$$

Le dénominateur vaut donc :

$$\text{Dénominateur}=s\cdot\frac{s}{2}\cdot\frac{s}{2}\cdot(1-x_1)\cdot(1-x_2)=\frac{s^3}{4}(1-x_1)\cdot(1-x_2).$$

Le numérateur se calcule à partir des expressions trouvées au point d) de l'exercice 1 :

$$\begin{aligned}\text{Numérateur}=\frac{s^2}{16}\Big\{&x_1^2[1-\sin\beta\sin(\gamma+\theta_1)]^2+x_1^2[1+\sin\beta\sin(\gamma+\theta_1)]^2+\\&+x_2^2[1-\sin\beta\sin(\gamma-\theta_2)]^2+x_2^2[1+\sin\beta\sin(\gamma-\theta_2)]^2\Big\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{s^2}{16}\left\{2x_1^2\Big[1+\sin^2\beta\sin^2(\gamma+\theta_1)\Big]+2x_2^2\Big[1+\sin^2\beta\sin^2(\gamma-\theta_2)\Big]\right\}\\
&= \frac{s^2}{8}\left\{x_1^2\Big[1+\sin^2\beta\sin^2(\gamma+\theta_1)\Big]+x_2^2\Big[1+\sin^2\beta\sin^2(\gamma-\theta_2)\Big]\right\}.
\end{aligned}
$$

Finalement, en combinant les résultats obtenus, on arrive enfin à l'expression de la section efficace :

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}\cos\beta\,\mathrm{d}\gamma}=\frac{C_F\alpha^2\alpha_s N_c Q_q^2}{4\pi^2}\left\{\frac{x_1^2(1+\sin^2\beta\,\sin^2(\gamma+\theta_1))+x_2^2(1+\sin^2\beta\,\sin^2(\gamma-\theta_2))}{s(1-x_1)(1-x_2)}\right\}}.
$$

c) Contrairement à ce qu'on avait vu pour l'interaction $e^+e^-\to q\bar{q}$, ici la section efficace présente des divergences, en $x_1=1$ et en $x_2=1$. Cela signifie qu'il n'est pas possible d'obtenir une expression analytique pour la section efficace intégrée, qui diverge : on doit introduire un cut-off (valeur maximale pour x_1 et x_2), non physique, et dont l'intégrale dépendrait.
On traitera cette problématique plus en détail au cours de la séance suivante.