Séance 4
Simulation de l'interaction $e^+e^- \to q\bar{q}g$

Dans la séance 3, nous avons simulé l'interaction $e^+e^- \to q\bar{q}$. Nous allons à présent ajouter la radiation d'un gluon par l'un des quarks. Cette séance est dédiée au calcul de la section efficace différentielle $e^+e^- \to q\bar{q}g$.

Nous procéderons en deux parties. Tout d'abord, nous allons étudier le facteur d'espace des phases intervenant dans la règle d'or : il est en effet important de partir dans la bonne direction lorsqu'on traite un problème à plus de deux particules dans l'état final. Ensuite, nous utiliserons ce résultat, ainsi que la formule donnant les éléments de matrice (vue au cours), pour déterminer l'expression de la section efficace différentielle.

Important : pour cet exercice, nous négligerons toujours les masses des quarks (les étudiants très motivés peuvent essayer de les garder dans les calculs, nous leur souhaitons bon courage).

1. Paramétrisation de l'espace des phases pour une interaction $1+2 \to 3+4+5$: Le facteur d'espace des phases en 3 dimensions est donné par :

$$\mathrm{d}\Phi_3 = \prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}^3k_i}{(2\pi)^3 2E_i}\right)(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2-k_3),$$

où p_1 et p_2 sont les quadrivecteurs énergie-impulsion des particules dans l'état initial et k_1, k_2 et k_3 ceux des particules dans l'état final.

a) Dans l'expression ci-dessus, utilisez le changement de variables suivant :

$$x_i = \frac{2E_i}{\sqrt{s}}$$

et obtenez une nouvelle expression pour les facteurs $\frac{\mathrm{d}^3k_i}{(2\pi)^3 2E_i}$. Vous devriez obtenir :

$$\frac{\mathrm{d}^3k_i}{(2\pi)^3 2E_i} = \frac{s}{8}\frac{1}{(2\pi)^3}x_i\mathrm{d}x_i\mathrm{d}\Omega_i,$$

où $\mathrm{d}\Omega_i \equiv \mathrm{d}\cos\theta_i\mathrm{d}\phi_i$.

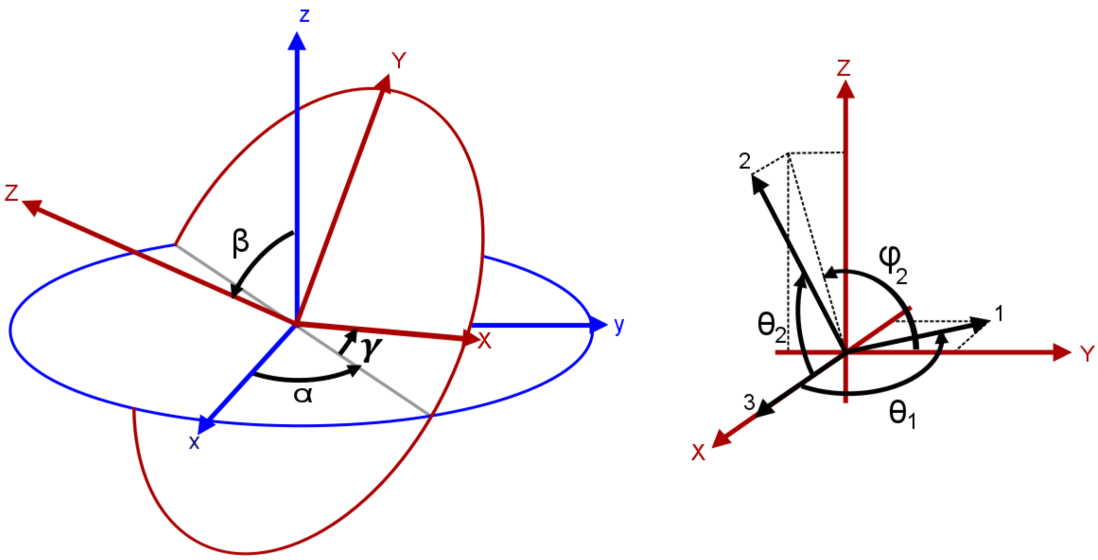
b) Sans se soucier de la conservation de l'énergie pour le moment (elle viendra lorsqu'on intégrera les facteurs en delta de Dirac), l'état final à 3 particules se décrit par 9 variables puisqu'on néglige les masses. Nous allons le paramétriser en 3 normes (x_1, x_2 et x_3) et 6 angles. Pour ces 6 angles, nous allons prendre la convention suivante :

- 3 angles d'Euler suivant la convention $z-x-z$:
  - $\alpha \in [0, 2\pi]$
  - $\beta \in [0, \pi]$
  - $\gamma \in [0, 2\pi]$,

  tels qu'après les trois rotations d'Euler transformant le repère (x, y, z) en (X, Y, Z), k_3 soit aligné sur l'axe des X et k_1 soit dans le plan XY avec $Y > 0$.
- 3 autres angles :
  - $\theta_1 \equiv \theta_{13} \in [0, \pi]$
  - $\theta_2 \equiv \theta_{23} \in [0, \pi]$
  - $\phi_2 \in [0, 2\pi]$.

θ_1 et θ_2 sont des angles entre les impulsions des quarks (et sont les mêmes dans tous les référentiels), et ϕ_2 est l'angle azimulthal de la deuxième particule par rapport à l'axe Y du référentiel obtenu après les 3 rotations d'Euler.

(Voir la figure ci-dessous pour une représentation schématique.)



Exprimez le delta de Dirac en fonction des x_i et des 6 angles, et insérez le résultat dans l'expression de $\mathrm{d}\Phi_3$. Vous devriez obtenir :

$$\mathrm{d}\Phi_3 = \frac{1}{(2\pi)^5}\left(\frac{s}{8}\right)^3 \frac{16}{s^2}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\cos\beta\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}\cos\theta_1\,\mathrm{d}\cos\theta_2\,\mathrm{d}\phi_2\,\delta(2-x_1-x_2-x_3)\,x_1x_2x_3$$
$$\times\,\delta(x_2\sin\theta_2\sin\phi_2)\,\delta(x_2\sin\theta_2\cos\phi_2+x_1\sin\theta_1)\,\delta(x_3+x_2\cos\theta_2+x_1\cos\theta_1).$$

c) Intégrez l'expression obtenue précédemment sur les variables x_3, $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$ et ϕ_2 pour supprimer les delta de Dirac (autrement dit, imposez la conservation de l'énergie). Vous devriez obtenir :

$$\mathrm{d}\Phi_3 = \frac{s}{32}\cdot\frac{1}{(2\pi)^5}\cdot\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\cos\beta\,\mathrm{d}\gamma,$$

avec les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = -\frac{x_1^2+x_3^2-x_2^2}{2x_1x_3} \\ \cos\theta_2 = -\frac{x_2^2+x_3^2-x_1^2}{2x_2x_3} \\ x_1+x_2+x_3=2 \\ \phi_2=\pi. \end{cases}$$

d) Montrez qu'avec nos conventions pour les angles d'Euler, les produits entre les différents quadrivecteurs sont donnés par :

$$p_{\frac{1}{2}}\cdot k_1 = \frac{s}{4}x_1\,(1\mp\sin\beta\sin(\gamma+\theta_1))$$
$$p_{\frac{1}{2}}\cdot k_2 = \frac{s}{4}x_2\,(1\mp\sin\beta\sin(\gamma-\theta_2))$$
$$p_{\frac{1}{2}}\cdot k_3 = \frac{s}{4}x_3\,(1\mp\sin\beta\sin\gamma)$$

2. Calcul de la section efficace $e^+e^-\to q\bar{q}g$: Maintenant que nous avons calculé l'élément d'espace des phases, nous pouvons passer au calcul de la section efficace différentielle. Pour rappel, la règle d'or pour une interaction $1+2\to 3+4+\cdots+n$ s'exprime comme :

$$\mathrm{d}\sigma = \overline{|\mathcal{M}|^2}\frac{J}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-(m_1m_2)^2}}\frac{\mathrm{d}^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3}\frac{\mathrm{d}^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4}\cdots\frac{\mathrm{d}^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4-\cdots-p_n),$$

où J est un facteur combinatoire : $J = \frac{1}{j!}$ pour chaque groupe de j particules identiques dans l'état final.
L'élément de matrice du processus a l'expression suivante (voir cours, pas démontrée ici) :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 8C_F(4\pi)^3\alpha^2\alpha_s N_c\, Q_q^2 \left\{ \frac{(p_{e^+}\cdot p_q)^2 + (p_{e^+}\cdot p_{\bar{q}})^2 + (p_{e^-}\cdot p_q)^2 + (p_{e^-}\cdot p_{\bar{q}})^2}{(p_{e^+}\cdot p_{e^-})(p_q\cdot p_g)(p_{\bar{q}}\cdot p_g)} \right\}.$$

a) Combinez les différents résultats obtenus pour trouver l'expression de la section efficace différentielle en les variables x_1, x_2, α, $\cos\beta$ et γ, en termes des quadrivecteurs des particules et de l'énergie disponible dans le centre de masse. Vous devriez obtenir :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\cos\beta\,\mathrm{d}\gamma} = \frac{C_F\alpha^2\alpha_s N_c Q_q^2}{2\pi^2} \left\{ \frac{(p_{e^+}\cdot p_q)^2 + (p_{e^+}\cdot p_{\bar{q}})^2 + (p_{e^-}\cdot p_q)^2 + (p_{e^-}\cdot p_{\bar{q}})^2}{s(p_q\cdot p_g)(p_{\bar{q}}\cdot p_g)} \right\}.$$

b) Utilisez les expressions des produits de quadrivecteurs calculés à l'exercice précédent pour simplifier le résultat ci-dessus. Vous devriez obtenir le résultat suivant :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\cos\beta\mathrm{d}\gamma} = \frac{C_F\alpha^2\alpha_s N_c Q_q^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{x_1^2(1+\sin^2\beta\,\sin^2(\gamma+\theta_1)) + x_2^2(1+\sin^2\beta\,\sin^2(\gamma-\theta_2))}{s(1-x_1)(1-x_2)} \right\}.$$

c) Est-il possible d'obtenir facilement l'expression analytique de la section efficace intégrée à partir de ce résultat ?