Correctif de la séance 3
Simulation de l'interaction $e^+e^- \to q\bar{q}$

1. Calcul de la section efficace $e^+e^- \to q\bar{q}$:

a) Dans le cas $1 + 2 \to 3 + 4$, la règle d'or se simplifie en :

$$\mathrm{d}\sigma = \overline{|\mathcal{M}|^2}\frac{J}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}}\frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3}\frac{\mathrm{d}^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4).$$

Commençons par simplifier la racine au dénominateur. Dans le système du centre de masse, on a $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ et donc $p_1 \cdot p_2 = E_1E_2 + |\vec{p}_1|^2$. De plus, on a toujours que $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$, ou $m^2 = E^2 - |\vec{p}|^2$. On peut donc réexprimer le contenu de la racine comme :

$$\begin{aligned}(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1m_2)^2 &= \left(E_1E_2 + |\vec{p}_1|^2\right)^2 - \left(E_1^2 - |\vec{p}_1|^2\right)\left(E_2^2 - |\vec{p}_1|^2\right) \\ &= (E_1E_2)^2 + 2E_1E_2\,|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_1|^4 - (E_1E_2)^2 - |\vec{p}_1|^4 + E_1^2\,|\vec{p}_1|^2 + E_2^2\,|\vec{p}_1|^2 \\ &= |\vec{p}_1|^2\,(E_1 + E_2)^2.\end{aligned}$$

La règle d'or pour la section efficace peut donc se réécrire comme :

$$\mathrm{d}\sigma = \overline{|\mathcal{M}|^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{J}{4\,|\vec{p}_1|\,(E_1 + E_2)}\frac{\mathrm{d}^3 p_3}{E_3}\frac{\mathrm{d}^3 p_4}{E_4}\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4).$$

On veut effectuer les intégrales sur les impulsions, de manière à ne garder qu'une expression différentielle en les variables angulaires. Pour ce faire, on peut réexprimer le δ en une partie provenant de l'énergie et une partie provenant de l'impulsion :

$$\begin{aligned}\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) &= \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \cdot \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \\ &= \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \cdot \delta^{(3)}(-\vec{p}_3 - \vec{p}_4).\end{aligned}$$

En effet, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ dans le référentiel du centre de masse. On peut donc effectuer facilement l'intégrale sur $\vec{p}_4$, ce qui supprime le δ en imposant $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4$:

$$\mathrm{d}\sigma = \overline{|\mathcal{M}|^2} \cdot \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 \frac{J}{|\vec{p}_1|\,(E_1 + E_2)} \cdot \frac{\delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4)}{E_3E_4}\mathrm{d}^3 p_3.$$

Ensuite, on peut exprimer E_3 et E_4 en termes des normes des impulsions et des masses puisque $E_3 = \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2}$ et $E_4 = \sqrt{|\vec{p}_4|^2 + m_4^2}$. Cela donne :

$$\mathrm{d}\sigma = \overline{|\mathcal{M}|^2} \cdot \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 \frac{J}{|\vec{p}_1|\,(E_1 + E_2)} \cdot \frac{\delta(E_1 + E_2 - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_4^2})}{\sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2}\sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_4^2}}\mathrm{d}^3 p_3.$$

Il reste à effectuer l'intégrale sur $\vec{p}_3$. Comme la fonction à intégrer ne dépend explicitement que de sa norme, il est naturel de faire un changement de variables pour passer en coordonnées sphériques, en termes de l'angle solide Ω et de la norme $\rho \equiv |\vec{p}_3|$. L'élément d'intégration s'écrit ainsi comme

$$\mathrm{d}^3 p_3 = \rho^2 \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\Omega$$

et la section efficace différentielle devient donc :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 \frac{J}{|\vec{p}_1|\,(E_1 + E_2)} \cdot \int_0^\infty \overline{|\mathcal{M}|^2}\frac{\delta(E_1 + E_2 - \sqrt{\rho^2 + m_3^2} - \sqrt{\rho^2 + m_4^2})}{\sqrt{\rho^2 + m_3^2}\sqrt{\rho^2 + m_4^2}}\rho^2 \mathrm{d}\rho.$$

Pour effectuer cette intégrale, on pose le changement de variables suivant :

$$\mathcal{E} = \sqrt{\rho^2 + m_3^2} + \sqrt{\rho^2 + m_4^2}$$

(où $\mathcal{E}$ peut s'interpréter comme l'énergie totale des particules dans l'état final). On a donc

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \mathrm{d}\rho \cdot \left[\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + m_3^2}} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + m_4^2}} \right] = \mathrm{d}\rho \cdot \frac{\rho\, \mathcal{E}}{\sqrt{\rho^2 + m_3^2}\sqrt{\rho^2 + m_4^2}},$$

ce qui ramène l'expression de la section efficace différentielle à

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 \frac{J}{|\vec{p}_1|\,(E_1 + E_2)} \cdot \int_0^\infty \overline{|\mathcal{M}|^2}\, \frac{\rho}{\mathcal{E}}\, \delta(E_1 + E_2 - \mathcal{E})\, \mathrm{d}\mathcal{E}.$$

L'intégrale est dès lors immédiate à résoudre puisqu'il suffit d'intégrer sur la fonction δ : en effet, l'intégrale couvre bien l'ensemble de toutes les valeurs possibles de $\mathcal{E}$. De cette manière, on trouve l'expression demandée (en se souvenant que $\rho = |\vec{p}_3|$) :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{(8\pi)^2} \frac{J}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|}.$$

Remarque : On pourrait argumenter que $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ dépend lui-même des impulsions des quarks dans l'état final, et qu'il n'est donc pas correct de le faire sortir de l'intégrale ci-dessus. C'est effectivement le cas. Cependant, il faut se souvenir que l'intégration que l'on vient d'effectuer n'est qu'une manière d'imposer la conservation de l'énergie/impulsion, ce que l'on peut faire explicitement dans l'expression de $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ en imposant la cinématique (voir point suivant). Il suffit donc de se souvenir que l'expression trouvée ci-dessus n'est valable qu'en supposant la conservation de l'énergie/impulsion dans l'expression de $\overline{|\mathcal{M}|^2}$.

b) On s'intéresse cette fois à l'interaction $e^+e^- \to q\bar{q}$. Pour cela, on va commencer par réécrire l'expression de $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ en effectuant les différents produits, ce qu'on peut faire en écrivant les quadrivecteurs des 4 particules dans les états initial et final, dans le référentiel du centre de masse (qui est équivalent au référentiel du laboratoire dans notre cas !).
Puisqu'on néglige les masses des électrons, on a $|\vec{p}_{e^\pm}| = E_{e^\pm}$. De plus, puisqu'on est dans le référentiel du centre de masse, $|\vec{p}_{e^+}| = |\vec{p}_{e^-}|$, ce qui implique que $E_{e^+} = E_{e^-} \equiv E$. Dans l'état final, par conservation de l'impulsion, on a $\vec{p}_q = -\vec{p}_{\bar{q}}$; puisque $m_q = m_{\bar{q}}$, on a donc $E_q = E_{\bar{q}}$. Enfin, par conservation de l'énergie, on doit avoir $E_q = E_{\bar{q}} = E$.
Si on place la paire initiale e^+e^- selon l'axe z (sans perte de généralité), on peut donc réexprimer les quadrivecteurs énergie-impulsion comme ceci :

$$\begin{cases} p_{e^-} = (E, 0, 0, E) \\ p_{e^+} = (E, 0, 0, -E) \\ p_q \;\;= (E, \vec{p}_q) \\ p_{\bar{q}} \;\;= (E, -\vec{p}_q) \end{cases}$$

De plus, on se souvient que $|\vec{p}_q| = \sqrt{E^2 - m_q^2}$; et d'autre part $\vec{p}_q \cdot \vec{u}_z = |\vec{p}_q| \cos\theta$. On peut donc calculer les produits des quadrivecteurs :

$$\begin{aligned} p_{e^+} \cdot p_q = p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}} &= E^2 + E\sqrt{E^2 - m_q^2}\cos\theta \\ p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}} = p_{e^-} \cdot p_q &= E^2 - E\sqrt{E^2 - m_q^2}\cos\theta \\ p_{e^+} \cdot p_{e^-} &= 2E^2. \end{aligned}$$

L'élément de matrice s'exprime donc comme :

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= 8\frac{(4\pi)^2\alpha^2}{s^2}N_c\,Q_q^2\,\left\{\left(E^2+E\sqrt{E^2-m_q^2}\cos\theta\right)^2+\left(E^2-E\sqrt{E^2-m_q^2}\cos\theta\right)^2+2E^2m_q^2\right\}\\
&= 8\frac{(4\pi)^2\alpha^2}{s^2}N_c\,Q_q^2\,\left\{2E^4+2E^2\left(E^2-m_q^2\right)\cos^2\theta+2E^2m_q^2\right\}\\
&= 16\frac{(4\pi)^2\alpha^2}{s^2}N_c\,Q_q^2E^4\,\left\{1+\left(1-\frac{m_q^2}{E^2}\right)\cos^2\theta+\frac{m_q^2}{E^2}\right\}.
\end{aligned}$$

La variable s représentant le carré de l'énergie dans le système du centre de masse s'exprime comme $s=(p_{e^+}+p_{e^-})^2=4E^2$. On peut donc réécrire l'élément de matrice comme :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}=(4\pi)^2\alpha^2N_c\,Q_q^2\,\left\{1+\left(1-\frac{4m_q^2}{s}\right)\cos^2\theta+\frac{4m_q^2}{s}\right\}.$$

Avant d'injecter cette expression dans celle de la section efficace différentielle trouvée au point a), réécrivons cette section efficace dans le cas de l'interaction $e^+e^-\to q\bar{q}$. Dans ce cas, le facteur statistique J vaut 1 car toutes les particules de l'état final sont différentes. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{(8\pi)^2}\frac{1}{s}\cdot\frac{\sqrt{E^2-m_q^2}}{E}\\
&= \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{(8\pi)^2}\frac{1}{s}\cdot\sqrt{1-\frac{4m_q^2}{s}}.
\end{aligned}$$

En injectant l'expression de $\overline{|\mathcal{M}|^2}$, on obtient la relation recherchée :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{\alpha^2}{4s}N_cQ_q^2\sqrt{1-\frac{4m_q^2}{s}}\left\{\left(1+\frac{4m_q^2}{s}\right)+\left(1-\frac{4m_q^2}{s}\right)\cos^2\theta\right\}.$$

c) Si on néglige la masse des quarks (ou plutôt, si $m_q\ll E$), on a :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\simeq\frac{\alpha^2}{4s}N_cQ_q^2\left(1+\cos^2\theta\right).$$

2. Simulation de l'interaction $e^+e^-\to q\bar{q}$:

a) On veut décrire entièrement la cinématique de l'état final, en supposant connues l'énergie de chaque faisceau, ainsi que la charge (et éventuellement la masse) des quarks produits. Nous avons vu précédemment que la conservation de l'énergie/impulsion implique que l'énergie du quark et de l'antiquark sont entièrement déterminées : elles sont égales à l'énergie du faisceau. Les quantités de mouvement de toutes les particules sont donc entièrement déterminées également. Il reste donc uniquement **deux variables** nécessaires pour décrire l'événement : les angles θ et ϕ. Ce sont les deux variables que l'on va devoir tirer.
Il convient de bien remarquer que l'expression de la section efficace qu'on a trouvée est différentielle en $\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}(-\cos\theta)$. Cela veut dire que ce n'est pas θ qu'il faut générer, mais $\cos\theta$ (qui suit la même distribution que $-\cos\theta$). On génère donc deux variables aléatoires :

— ϕ, généré uniformément entre 0 et 2π ;

— $\cos\theta$, généré uniformément entre -1 et 1.

La valeur maximale de la section efficace différentielle est atteinte lorsque $\cos^2\theta=1$, et est donc de

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\max}=\frac{\alpha^2}{2s}N_cQ_q^2.$$

b) Il suffit dès lors d'appliquer la méthode de réjection pour l'expression de la section efficace différentielle qu'on a retrouvée : pour chaque paire $(\cos\theta, \phi)$ générée, on génère une autre variable y uniformément entre 0 et la valeur maximale que l'on vient de déterminer, et on garde l'événement (autrement dit la paire $(\cos\theta, \phi)$) uniquement si y est inférieure à l'expression de la section efficace correspondant à cette valeur de $\cos\theta$. On peut ensuite remplir différents histogrammes sur base de ces valeurs pour les événements acceptés, par exemple avec θ, ϕ, la quantité de mouvement transverse $p_T \equiv p\sin\theta$, la pseudorapidité $\eta \equiv -\ln\tan\frac{\theta}{2}$,...
Remarque : Puisque ϕ n'intervient pas dans l'expression de la section efficace différentielle, on ne doit en fait utiliser que θ pour la méthode de réjection. C'est un cas particulier : en général, il faut faire une méthode à plusieurs variables (voir l'un des "devoirs" de la séance précédente). Il est cependant nécessaire de générer ϕ pour avoir accès à la cinématique complète d'un événement.
Une autre question que l'on peut se poser est de savoir s'il faut intégrer l'expression de la section efficace différentielle sur ϕ, ce qui ferait sortir un facteur 2π. La réponse est que cela ne change rien à la distribution puisqu'il s'agit uniquement d'une constante multiplicative : de fait, la normalisation de la fonction n'intervient que pour la section efficace totale, qui peut être calculée indépendamment et doit être intégrée sur toutes les variables de toute façon (voir plus loin).
L'efficacité de la méthode de réjection est de $\frac{2+\frac{2}{3}}{2\times 2} = \frac{2}{3}$.

c) La distribution de $\cos\theta$ est censée suivre une loi de la forme $a \cdot (1 + b \cdot \cos^2\theta)$. En fittant la distribution par cette fonction, il faudrait que la valeur estimée de b soit compatible avec 1.

d) La section efficace intégrée pour une saveur de quarks donnée et dans l'approximation des masses nulles vaut :

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\alpha^2}{4s} N_c Q_q^2 \left(1 + \cos^2\theta\right) \mathrm{d}(-\cos\theta)\,\mathrm{d}\phi \\
&= 2\pi \cdot \frac{\alpha^2}{4s} N_c Q_q^2 \int_{-1}^{1} \left(1 + v^2\right) \mathrm{d}v \\
&= \frac{\pi\alpha^2}{2s} N_c Q_q^2 \left(2 + \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{4}{3}\frac{\pi\alpha^2 N_c Q_q^2}{s}.
\end{aligned}$$

En évaluant cette expression, par exemple, pour des quarks u ($Q_q = \frac{2}{3}$) avec une énergie de 5 GeV par faisceau (donc $s = 100\,\mathrm{GeV}^2$), on trouve en prenant $\alpha = 0{,}007\,30$, et $N_C = 3$:

$$\sigma = 2{,}974 \times 10^{-6}\,\mathrm{GeV}^{-2}.$$

On préfère généralement exprimer les sections efficaces en picobarns : on se souvient que 1 barn $= 10^{-28}\,\mathrm{m}^2$. Il y a moyen de trouver, en effectuant les conversions pour passer des unités naturelles aux unités SI, que $1\,\mathrm{GeV}^{-2} = 3{,}87 \times 10^8\,\mathrm{pb}$. Notre section efficace vaut donc :

$$\sigma = 1\,150\,\mathrm{pb}.$$

La luminosité intégrée sur une certaine période de temps $\int\mathcal{L}$ est définie de la façon suivante :

$$N = \sigma \cdot \int\mathcal{L},$$

où N est le nombre d'événements produits (ou observés). En connaissant le nombre d'événements qu'on a générés, on peut donc estimer la luminosité de notre échantillon. Par exemple, si on a généré 100 000 événements, la luminosité correspondante est de :

$$\int\mathcal{L} = 87{,}0\,\mathrm{pb}^{-1}.$$

Remarque : Généralement, on procède dans l'autre sens : la luminosité intégrée correspond à la quantité de données collectées par une expérience pendant un certain temps. Lorsqu'on veut comparer les résultats de cette expérience avec des prédictions théoriques, on va générer des simulations qu'on va devoir repondérer pour que le nombre d'événements attendus puisse être comparé au nombre d'événements observés. Le facteur de pondération sera donné par $\lambda = \frac{\sigma \int \mathcal{L}}{N}$, où N est le nombre total d'événements générés. Connaissant la luminosité collectée, on choisit généralement N pour être suffisamment petit (par rapport à 1) pour éviter un impact trop grand des fluctuations statistiques.