Séance 3
Simulation de l'interaction $e^+e^- \to q\bar{q}$

Au cours de cette séance d'exercices, nous allons simuler la réaction $e^+e^- \to q\bar{q}$ à l'aide des générateurs de nombres aléatoires que nous avons appris à utiliser précédemment. Le premier exercice vous permet de calculer la section efficace théorique en partant des éléments de matrice. Dans le second exercice, il est demandé d'écrire le code de simulation. Nous allons générer des événements et étudier les caractéristiques de ceux-ci avec des histogrammes. Le dernier exercice permet aux plus rapides d'aller un peu plus loin dans les détails et/ou d'écrire le résultat dans des vrais fichiers d'événements simulés (dans un `ROOT tree`), qui pourraient être utilisés dans des analyses cinématiques.

1. Calcul de la section efficace $e^+e^- \to q\bar{q}$: Nous allons partir de la relation suivante vue au cours pour l'élément de matrice du processus (relation 3.16 du syllabus) :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 8\frac{(4\pi)^2\alpha^2}{s^2} N_c\, Q_q^2 \, \Big\{ (p_{e^+}\cdot p_q)(p_{e^-}\cdot p_{\bar{q}}) + (p_{e^+}\cdot p_{\bar{q}})(p_{e^-}\cdot p_q) + m_q^2 (p_{e^+}\cdot p_{e^-}) \Big\} ,$$

ainsi que de la *règle d'or* dans le cas d'une interaction $1+2 \to 3+4+\ldots+n$:

$$\mathrm{d}\sigma = \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{J}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}} \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{\mathrm{d}^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \cdots \frac{\mathrm{d}^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4-\cdots-p_n),$$

où $p_i \equiv (E_i, \vec{p_i})$ avec $E_i = \sqrt{m_i^2 + |\vec{p_i}|^2}$, et où J est un facteur statistique : $J = \frac{1}{j!}$ pour chaque groupe de j particules identiques dans l'état final.

a) Simplifiez la règle d'or pour le cas particulier $1+2 \to 3+4$ dans le référentiel du centre de masse. Obtenez l'expression de $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$, intégrée sur les impulsions. Vous devriez trouver :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{(8\pi)^2} \frac{J}{(E_1+E_2)^2} \frac{|\vec{p_3}|}{|\vec{p_1}|}.$$

b) Utilisez le résultat précédent et l'expression du carré de l'amplitude pour obtenir la section efficace de l'interaction $e^+e^- \to q\bar{q}$, différentielle en les variables angulaires de l'état final. Vous devriez obtenir l'expression suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} N_c Q_q^2 \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}} \left\{ \left(1 + \frac{4m_q^2}{s}\right) + \left(1 - \frac{4m_q^2}{s}\right) \cos^2\theta \right\} ,$$

où s est le carré de l'énergie dans le système du centre de masse.

c) Évaluez le résultat dans l'approximation des masses nulles.

d) **[Devoir]** Redémontrez l'expression de $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ donnée ci-dessus à partir du diagramme de Feynman.

2. Simulation de l'interaction $e^+e^- \to q\bar{q}$: Nous allons à présent simuler la réaction (dans l'approximation des masses nulles) en utilisant l'expression de la section efficace différentielle obtenue à l'exercice 1c). Nous allons utiliser la méthode de réjection pour simuler les événements. Il est donc nécessaire de déterminer les différents éléments intervenant dans l'algorithme de génération.

a) Déterminez le nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire le nombre de variables à tirer aléatoirement. Déterminez la valeur maximale de la section efficace pour une valeur fixée de s et pour une saveur de quarks donnée.

b) Écrivez un code qui génère les événements suivant la distribution de la section efficace. Faites des histogrammes pour les variables cinématiques importantes (lesquelles sont-elles ?). Calculez l'efficacité de la méthode de réjection.

c) Observez la distribution de $\cos\theta$ et ajustez une fonction judicieusement choisie.

d) Calculez la section efficace intégrée sur les variables angulaires, pour une valeur de s fixée et pour une saveur de quarks donnée. En sachant combien d'événements vous avez généré, déduisez-en la luminosité de l'échantillon que vous avez produit.

3. Pour aller plus loin (Devoir) : Vous pouvez faire l'une ou l'autre des questions proposées ci-dessous pour améliorer votre code (toutes les questions sont indépendantes).

a) Dans la simulation que nous venons de faire, nous avons négligé les masses. Refaites la simulation en tenant compte de la masse des quarks produits. Comparez les différentes distributions obtenues pour les différentes saveurs de quarks. Comment pourrait-on produire des échantillons "réalistes" comprenant toutes les saveurs de quarks dans l'état final ?

b) Calculez les quadri-vecteurs de chacune des particules dans l'état initial et final, et sauvegardez ces informations dans un `TTree`. Cela pourrait permettre d'utiliser vos événements générés pour écrire un code d'analyse ; par exemple, vous pouvez vous servir des informations des quadrivecteurs pour faire l'histogramme d'autres grandeurs cinématiques comme la quantité de mouvement transverse des quarks ($p_T \equiv \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$).

c) À partir de l'expression vue au cours (formule 3.29), refaites l'exercice 2 en vous plaçant sur le pôle du Z (on néglige la contribution du photon, ainsi que les corrections radiatives).