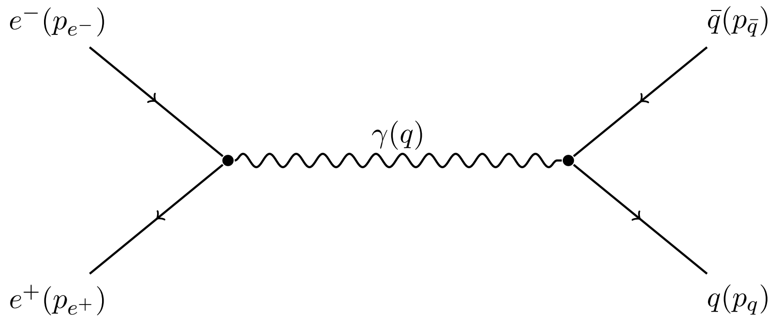
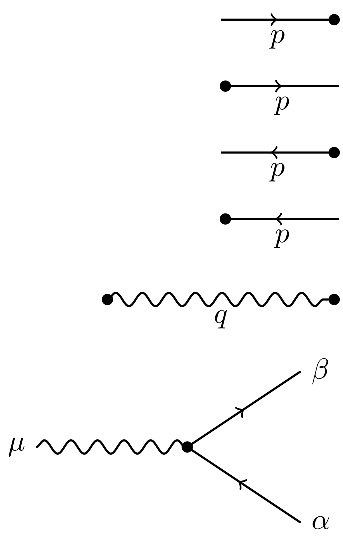
Annexe au correctif de la séance 3 : Démonstration de $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ pour l'interaction $e^+e^- \to q\bar{q}$

Le but de ce document est de démontrer comment on arrive à l'expression de l'élément de matrice pour le processus traité à la séance 3. Il répond de ce fait au "devoir" qu'est la question 1d), et devrait satisfaire ceux qui n'apprécient pas utiliser des expressions toutes faites sans les avoir démontrées.
Il s'agit aussi d'une tentative pour avoir une explication pédagogique d'un calcul complet pour un diagramme de Feynman, même si celui-ci est assez simple dans ce cas. En tant qu'étudiant, je sais que cela m'avait souvent manqué.

On veut trouver l'élément de matrice du processus $e^+e^- \to \gamma \to q\bar{q}$. On néglige la contribution du Z (c'est une supposition acceptable si on se place à une énergie dans le centre de masse assez basse pour être loin du pic, par exemple).
Le diagramme de Feynman correspondant est :



Rappelons les règles de Feynman (on se place dans la jauge de Feynman pour le propagateur du photon) :



$$= \quad u_\alpha(p,s)$$
$$= \quad \bar{u}_\alpha(p,s)$$
$$= \quad \bar{v}_\alpha(p,s)$$
$$= \quad v_\alpha(p,s)$$
$$= \quad \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2}$$
$$= \quad (+ie\gamma^\mu)_{\beta\alpha}.$$

Sur base de ces conventions, on peut écrire l'élément de matrice, en se souvenant qu'il faut toujours parcourir les lignes de fermions dans le sens contraire des flèches et qu'il faut contracter les indices de Lorentz des vertex aux lignes de photons qui viennent de ces vertex.
On prend la convention que les indices α, β, γ et δ correspondent aux indices de spins, et que les indices μ et ν correspondent aux indices de Lorentz. Aussi, pour le deuxième vertex, on remplace e

par $Q_q e$, où Q_q est la charge du quark par rapport à celle de l'électron (donc $1/3$ ou $-2/3$).
Cela donne :

$$i\mathcal{M} = \bar{v}(p_{e^+})_\alpha (+ie\gamma^\mu)_{\alpha\beta} u(p_{e^-})_\beta \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right) \bar{u}(p_q)_\gamma (+iQ_q e\gamma^\nu)_{\gamma\delta} v(p_{\bar{q}})_\delta.$$

(Remarquez qu'il peut y avoir une différence de signe selon les conventions ; ça ne change rien au final puisqu'on va prendre le carré de cet élément de matrice.)
En mettant en évidence les grandeurs scalaires, en appliquant le produit de Lorentz $g_{\mu\nu}\gamma^\nu = \gamma_\mu$ et en omettant les indices spinoriels α, β, γ et δ, on obtient :

$$i\mathcal{M} = \frac{iQ_q e^2}{q^2} \bar{v}(p_{e^+})\gamma^\mu u(p_{e^-}) \bar{u}(p_q)\gamma_\mu v(p_{\bar{q}}).$$

On veut calculer $\overline{|\mathcal{M}|^2} = \overline{\mathcal{M}\mathcal{M}^*}$, où on prend la moyenne sur les spins de l'état initial et où on somme sur tous les spins de l'état final. Comme chaque fermion de l'état initial peut avoir deux états de spin, on a :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \overline{\mathcal{M}\mathcal{M}^*} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{\sigma_{e^+,e^-,q,\bar{q}}} |\mathcal{M}|^2.$$

Il faut donc commencer par prendre le complexe conjugué de l'expression de $i\mathcal{M}$ ci-dessus :

$$-i\mathcal{M}^* = \frac{-iQ_q e^2}{q^2} (\bar{v}(p_{e^+})\gamma^\mu u(p_{e^-}))^* (\bar{u}(p_q)\gamma_\mu v(p_{\bar{q}}))^*.$$

Pour calculer le conjugué de ces produits, on se souvient des relations générales : pour des spineurs ψ et χ, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\chi\right)^* &= \left(\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\chi\right)^\dagger \\
&= \chi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\left(\gamma^0\right)^\dagger\psi \\
&= \chi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0\psi \quad \text{car} \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \text{ et } \left(\gamma^0\right)^\dagger = \gamma^0 \\
&= \bar{\chi}\gamma^\mu\psi \quad \text{car} \quad (\gamma_0)^2 = \mathbb{1}.
\end{aligned}$$

Remarque : À la première ligne, il peut sembler étrange que l'on prenne le "dagger" (†) plutôt que le complexe conjugué. Cependant, il faut se souvenir que le produit $\bar{\psi}\gamma^\mu\chi$ est un nombre (produit d'un vecteur ligne, d'une matrice et d'un vecteur colonne). Le transposé d'un nombre est un nombre !
On obtient ainsi :

$$-i\mathcal{M}^* = \frac{-iQ_q e^2}{q^2} \bar{u}(p_{e^-})\gamma^\mu v(p_{e^+}) \bar{v}(p_{\bar{q}})\gamma_\mu u(p_q).$$

On peut dès lors calculer le carré de l'élément de matrice, en multipliant les deux expressions (attention à changer d'indice de Lorentz pour les deux facteurs qu'on multiplie, pour éviter la confusion) :

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4 Q_q^2}{q^4} \sum_{\sigma_{e^+,e^-,q,\bar{q}}} \left[\bar{v}(p_{e^+})\gamma^\mu u(p_{e^-})\right]\left[\bar{u}(p_q)\gamma_\mu v(p_{\bar{q}})\right]\left[\bar{u}(p_{e^-})\gamma^\nu v(p_{e^+})\right]\left[\bar{v}(p_{\bar{q}})\gamma_\nu u(p_q)\right] \\
&= \frac{e^4 Q_q^2}{q^4} \sum_{\sigma_{e^+,e^-,q,\bar{q}}} \left[\bar{v}(p_{e^+})\gamma^\mu u(p_{e^-})\right]\left[\bar{u}(p_{e^-})\gamma^\nu v(p_{e^+})\right]\left[\bar{u}(p_q)\gamma_\mu v(p_{\bar{q}})\right]\left[\bar{v}(p_{\bar{q}})\gamma_\nu u(p_q)\right].
\end{aligned}$$

En effet, chacun des 4 facteurs entre crochets est un nombre, et commute avec tout le reste. De cette manière, on voit qu'on est parvenu à séparer la partie provenant de l'état initial et celle provenant de l'état final. Regardons, par exemple, la partie concernant l'état final (la paire $q\bar{q}$) :

$$\sum_{\sigma_q,\sigma_{\bar{q}}} \bar{u}(p_q)\gamma_\mu v(p_{\bar{q}}) \bar{v}(p_{\bar{q}})\gamma_\mu u(p_q).$$

En réecrivant explicitement les indices spinoriels, on a :

$$\sum_{\sigma_q,\sigma_{\bar{q}}} \bar{u}_\alpha(p_q)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} v_\beta(p_{\bar{q}})\bar{v}_\gamma(p_{\bar{q}})(\gamma_\nu)_{\gamma\delta} u_\delta(p_q) = \sum_{\sigma_q,\sigma_{\bar{q}}} u_\delta(p_q)\bar{u}_\alpha(p_q)(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} v_\beta(p_{\bar{q}})\bar{v}_\gamma(p_{\bar{q}})(\gamma_\nu)_{\gamma\delta}.$$

En effet, $u_\delta(p_q)$ est un nombre (puisqu'on a tout exprimé en composantes, on peut commuter sans problème).
On peut à présent utiliser les équations du mouvement pour réécrire l'expression : en effet,

$$\sum_{\sigma_q} u_\delta(p_q)\bar{u}_\alpha(p_q) = \left(\not{p}_q + m_q\right)_{\delta\alpha}$$
$$\sum_{\sigma_{\bar{q}}} v_\beta(p_{\bar{q}})\bar{v}_\gamma(p_{\bar{q}}) = \left(\not{p}_{\bar{q}} - m_q\right)_{\beta\gamma}.$$

L'expression ci-dessus devient donc :

$$\begin{aligned}\left(\not{p}_q + m_q\right)_{\delta\alpha}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\left(\not{p}_{\bar{q}} - m_q\right)_{\beta\gamma}(\gamma_\nu)_{\gamma\delta} &= \mathrm{Tr}\Big[\left(\not{p}_q + m_q\right)\gamma_\mu\left(\not{p}_{\bar{q}} - m_q\right)\gamma_\nu\Big] \\ &= \mathrm{Tr}\Big[\left(\gamma_\rho p_q^\rho + m_q\right)\gamma_\mu\left(\gamma_\sigma p_{\bar{q}}^\sigma - m_q\right)\gamma_\nu\Big].\end{aligned}$$

En effet, la disposition (en cycle) des indices spinoriels correspond bien au calcul d'une trace. Pour passer de la première ligne à la deuxième, on a utilisé la définition de $\not{p}$.
Pour simplifier davantage cette expression, on peut utiliser les propriétés des traces des matrices γ :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(\text{nombre impair de } \gamma) = 0\\ &\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}\\ &\mathrm{Tr}\left(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\sigma\right) = 4\left(g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}\right).\end{aligned}$$

On constate donc qu'on n'a que deux termes non nuls dans l'expression qu'on a trouvée, puisque les autres correspondraient à des traces de trois matrices γ. L'expression devient donc :

$$\begin{aligned}-m_q^2\,\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) + p_q^\rho p_{\bar{q}}^\sigma\,\mathrm{Tr}(\gamma_\rho\gamma_\mu\gamma_\sigma\gamma_\nu) &= -m_q^2\cdot 4g_{\mu\nu} + 4p_q^\rho p_{\bar{q}}^\sigma(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\sigma}g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu}g_{\mu\gamma})\\ &= -4m_q^2 g_{\mu\nu} + 4(p_{q\mu}p_{\bar{q}\nu} - (p_q\cdot p_{\bar{q}})g_{\mu\nu} + p_{q\nu}p_{\bar{q}\mu})\\ &= 4\Big[p_{q\mu}p_{\bar{q}\nu} + p_{q\nu}p_{\bar{q}\mu} - g_{\mu\nu}\left(p_q\cdot p_{\bar{q}} + m_q^2\right)\Big].\end{aligned}$$

On peut à présent refaire exactement le même raisonnement pour la partie qui provient de l'état initial électron-positron, pour obtenir :

$$\sum_{\sigma_{e^+},\sigma_{e^-}} \bar{v}(p_{e^-})\gamma^\mu u(p_{e^-})\bar{u}(p_{e^-})\gamma^\nu v(p_{e^+}) = 4\Big[p_{e^-}^\nu p_{e^+}^\mu + p_{e^-}^\nu p_{e^+}^\mu - g^{\nu\mu}\left(p_{e^-}\cdot p_{e^+} + m_e^2\right)\Big].$$

On peut donc écrire l'expression totale de $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ (notons qu'on doit également sommer sur toutes les couleurs de quarks de l'état final, d'où le facteur $N_C = 3$: le processus est exactement le même pour chaque couleur) :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = N_C\cdot\frac{e^4Q_q^2}{q^4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 4\cdot 4\cdot\Big[p_{q\mu}p_{\bar{q}\nu} + p_{q\nu}p_{\bar{q}\mu} - g_{\mu\nu}\left(p_q\cdot p_{\bar{q}} + m_q^2\right)\Big]\cdot\Big[p_{e^-}^\nu p_{e^+}^\mu + p_{e^-}^\nu p_{e^+}^\mu - g^{\nu\mu}\left(p_{e^-}\cdot p_{e^+} + m_e^2\right)\Big].$$

En distribuant les produits, on obtient (en se souvenant que $g_{\mu\nu}g^{\nu\mu} = 4$) :

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} = 4N_C\frac{e^4Q_q^2}{q^4}\Big\{&(p_q\cdot p_{e^+})(p_{\bar{q}}\cdot p_{e^-}) + (p_q\cdot p_{e^+})(p_{\bar{q}}\cdot p_{e^-}) + (p_q\cdot p_{e^-})(p_{\bar{q}}\cdot p_{e^+}) + (p_q\cdot p_{e^-})(p_{\bar{q}}\cdot p_{e^+})\\ &-[(p_{e^-}\cdot p_{e^+}) + (p_{e^-}\cdot p_{e^+})]\cdot\Big[p_q\cdot p_{\bar{q}} + m_q^2\Big] - [(p_q\cdot p_{\bar{q}}) + (p_q\cdot p_{\bar{q}})]\cdot\Big[p_{e^-}\cdot p_{e^+} + m_e^2\Big]\\ &+4\left(p_q\cdot p_{\bar{q}} + m_q^2\right)\left(p_{e^-}\cdot p_{e^+} + m_e^2\right)\Big\}.\end{aligned}$$

Si on néglige la masse des électrons ($m_e^2 \simeq 0$), l'expression se simplifie en :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 8N_C \frac{e^4 Q_q^2}{q^4}\Big[(p_q \cdot p_{e^+})(p_{\bar{q}} \cdot p_{e^-}) + (p_q \cdot p_{e^-})(p_{\bar{q}} \cdot p_{e^+}) + m_q^2 (p_{e^+} \cdot p_{e^-})\Big].$$

Pour finir, on peut remarquer que $q^2 = s$ (s étant le carré de l'énergie du centre de masse), et on peut définir $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$. L'expression finale de $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ est donc :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 8\frac{(4\pi)^2\alpha^2}{s^2} N_C Q_q^2\Big[(p_q \cdot p_{e^+})(p_{\bar{q}} \cdot p_{e^-}) + (p_q \cdot p_{e^-})(p_{\bar{q}} \cdot p_{e^+}) + m_q^2 (p_{e^+} \cdot p_{e^-})\Big].$$

Il s'agit bien de l'expression que nous utiliserons dans la séance 3.