

Séance 1

Générateurs de nombres aléatoires

Dans cette première séance d'exercices, nous allons apprendre à générer des nombres aléatoires. Bien que les nombres que nous allons générer par ordinateur ne soient jamais réellement aléatoires, puisqu'ils seront produits à partir d'algorithmes bien définis, il est possible de faire en sorte qu'ils apparaissent aléatoires à quelqu'un qui ne connaît pas l'algorithme.

1. Algorithme de génération d'une variable aléatoire uniforme : Un premier simple algorithme de génération de nombres aléatoires (appelé générateur congruentiel linéaire) peut être construit de la manière suivante. En choisissant un entier initial I_0 , la formule suivante permet de générer une suite de nombres "aléatoires" R_j :

$$I_j = \text{mod}(aI_{j-1} + c, m)$$
$$R_j = \frac{I_j}{m},$$

où a , c et m sont des nombres entiers. De cette façon, en choisissant judicieusement les valeurs des paramètres, on obtient une série de nombres R_j distribués uniformément sur l'intervalle $[0, 1[$.

- Construisez un générateur de nombres aléatoires uniformes sur $[0, 1[$ en suivant la méthode décrite ci-dessus. Utilisez $I_0 = 4711$, $a = 205$, $c = 29573$ et $m = 139968$. Observez la moyenne donnée par ROOT, est-ce attendu? Observez l'écart type (RMS) donné par ROOT, est-ce attendu?
- Comparez la corrélation entre deux nombres aléatoires consécutifs. Que remarquez-vous?
- Dessinez l'histogramme en incluant les barres d'erreurs à l'aide de l'option "e" de la méthode Draw(). Justifiez leur taille.

2. Génération d'une variable aléatoire uniforme à l'aide des fonction prédéfinies de ROOT : Il existe bien entendu des algorithmes bien plus puissants que le simple calcul modulaire que nous venons d'utiliser. ROOT propose un algorithme, que nous allons comparer avec notre première méthode.

- Au moyen de la classe TRandom3 de ROOT, refaites l'exercice précédent.
- [Devoir]** Construisez un générateur de nombres aléatoires uniformes sur l'intervalle $[-1\ 000, 1\ 000[$, utilisant la classe TRandom3, avec une seed à 123456. Générez 10 000 nombres aléatoires dans un histogramme de 100 bins allant de $-1\ 000$ à $1\ 000$. Observez la moyenne et l'écart type donnés par ROOT. Il y a de grandes chances pour que la moyenne de votre échantillon ne soit pas 0 (moyenne de la distribution théorique). Quelle est la distribution suivie par l'estimateur moyenne (difficile de manière exacte)? Quelle est la p-value (two-tailed) de notre observation de la moyenne?

3. Génération d'une loi normale : Maintenant que nous sommes en mesure de générer des nombres aléatoires suivant une loi uniforme, nous pouvons commencer à générer des distributions un peu plus intéressantes. Le premier exemple sera celui de la loi Normale centrée réduite : $\mathcal{N}(0, 1)$. Il a été montré que la manière optimale de simuler cette distribution est donnée par la *méthode de Box-Muller* dont voici le principe :

Si U_1 et U_2 sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0, 1[$, alors les variables aléatoires :

$$T_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$$
$$T_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$$

suivent toutes les deux une distribution normale centrée réduite et sont indépendantes.

- Écrivez un programme qui génère des nombres aléatoires suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Utilisez la classe TRandom3 pour générer les nombres U_1 et U_2 .

- b) Utilisez les outils d'ajustement (fit) pour ajuster une gaussienne sur la distribution générée. Vérifiez que les paramètres obtenus sont en accord avec vos valeurs de μ et σ^2 .
- c) **[Devoir]** Dans un histogramme de 100 bins entre 0 et 20, générez 10 000 points suivant $\mathcal{N}(\mu = 10, \sigma^2 = 16)$, avec une seed de 123456 pour le générateur. Combien d'événements sont dans l'underflow? Combien d'événements sont dans l'overflow? Combien d'événements auriez-vous prédits dans l'underflow et dans l'overflow? Que vaut la moyenne échantillon? Que vaut le RMS? Connaissant la vraie distribution utilisée pour générer les nombres aléatoires, quelle est la p-value (two-tailed) de la moyenne observée?
- d) **[Devoir]** Fitez l'histogramme avec une gaussienne. Quel est le χ^2 observé? Quel est le nombre de degrés de liberté? Quelle est la p-value? Est-ce satisfaisant?

Séance 2

Simulation d'une distribution quelconque

Durant la première séance d'exercices, nous avons appris à générer des nombres aléatoires suivant une distribution uniforme sur l'intervalle $[0, 1[$. Nous allons à présent utiliser cela pour simuler d'autres distributions plus intéressantes, le but étant de pouvoir générer n'importe quelle distribution dont on a l'expression analytique.

Nous verrons deux méthodes de génération dans cette séance. La première, la *méthode de la transformée inverse*, est la plus efficace mais ne peut pas être appliquée dans tous les cas. La deuxième, la *méthode de réjection de von Neumann*, fonctionne à tous les coups mais peut être très inefficace. Le troisième exercice vous fera investiguer des pistes pour améliorer l'efficacité de cette méthode.

1. Méthode de la transformée inverse : Cette méthode est la seule qui garantit une efficacité de 100 %, mais elle nécessite que l'on soit capable de calculer la fonction cumulative de la fonction de distribution (et donc de connaître une primitive), et de calculer sa réciproque. C'est le cas pour des distributions exponentielle, (co)sinusoïdale ou polynomiale de degré plus élevé. Dans les autres cas, il est nécessaire d'employer la méthode de réjection, comme nous le verrons à l'exercice suivant.

Le principe de la méthode de la transformée inverse est le suivant. Soit $f(x)$ la fonction de densité de probabilité de x sur l'intervalle $[a, b]$. Puisqu'il s'agit d'une fonction de densité de probabilité, son intégrale vaut 1 :

$$\int_a^b f(x) dx = 1.$$

On définit alors la *fonction cumulative* $F(x)$ comme l'intégrale de $f(x)$ jusqu'à la valeur x :

$$F(x) \equiv \int_a^x f(\xi) d\xi.$$

Par construction, $F(x)$ est toujours comprise entre 0 et 1, et on a que $F(a) = 0$ et $F(b) = 1$.

Nous allons à présent prouver que si u suit une loi uniforme sur $[0, 1[$, alors $x = F^{-1}(u)$ est distribuée selon $f(x)$.

Démonstration : par changement de variables et conservation de la probabilité, on a :

$$f(u) du = f(x) dx \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(u) \cdot \frac{du}{dx} = 1 \cdot \frac{du}{dx}$$

puisque u suit une loi uniforme sur $[0, 1[$. D'autre part, par définition :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Donc, $F(x) = u$, autrement dit $x = F^{-1}(u)$.

Pour générer x à partir d'une variable aléatoire distribuée selon une loi uniforme, il « suffit » donc de calculer la fonction inverse de la fonction cumulative de $f(x)$.

- a) Générez une loi exponentielle de paramètre λ en utilisant la méthode de la transformée inverse, et fittez la distribution obtenue avec la forme attendue de la fonction.
- b) **[Devoir]** Générez une loi en $\frac{1}{x}$ sur l'intervalle $[0,001; 10]$. N'oubliez pas de normaliser proprement la fonction de densité de probabilité.
- c) **[Devoir]** Générez une loi de Cauchy en utilisant la méthode de la transformée inverse.

2. Méthode de réjection de von Neumann : Il s'agit de la méthode « par défaut », qui peut permettre de générer n'importe quelle distribution. Le problème est qu'elle n'a pas une efficacité de 100 % et est donc plus lente au niveau du temps de calcul.

On veut générer des variables aléatoires x qui suivent une fonction de densité de probabilité $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$. La procédure à suivre est la suivante :

1. On détermine f_{\max} , la valeur maximale que peut prendre $f(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$.
2. On génère x_i uniformément sur l'intervalle $[a, b]$.
3. On génère y_i uniformément sur l'intervalle $[0, f_{\max}]$.
4. Si $f(x_i) > y_i$, alors on garde x_i . Sinon, on rejette la valeur et on recommence.

Les nombres x_i acceptés suivent alors exactement la distribution de $f(x)$. On constate facilement que l'efficacité de la méthode (la fraction d'événements qui seront acceptés) est :

$$\mathcal{E} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{f_{\max} \cdot (b - a)}.$$

- a) Utilisez la méthode de réjection pour simuler la distribution

$$f(x) = \frac{3}{8} (1 + x^2)$$

sur l'intervalle $[-1, 1]$. Fitez la distribution obtenue. Calculez l'efficacité attendue de la méthode de réjection et comparez-la avec l'efficacité observée.

- b) **[Devoir]** Utilisez la méthode de réjection pour simuler la distribution bidimensionnelle

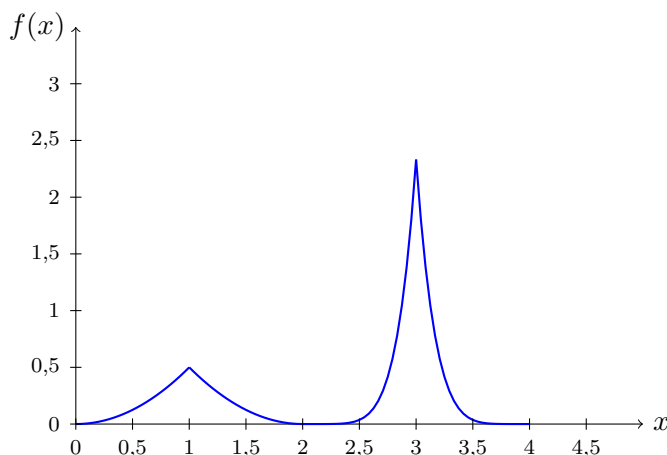
$$f(x, y) = \frac{1}{12} (3 - y) (1 + x^2),$$

pour $x \in [-1, 1]$ et $y \in [0, 3]$. Quelle est l'efficacité de la méthode ?

3. Limitations et améliorations de la méthode de réjection (gros devoir) : Dans cet exercice, nous allons rencontrer un cas où la méthode de réjection donne une très mauvaise efficacité. Nous allons voir comment améliorer la méthode pour ce genre de situations.

- a) Utilisez la méthode de réjection pour simuler la distribution $f(x)$ définie sur l'intervalle $x \in [0, 4]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x - 2)^2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \frac{7}{3}(x - 2)^6 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ \frac{7}{3}(x - 4)^6 & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$



- b) Estimez l'efficacité de la méthode à partir des simulations et de manière analytique.
- c) Trouvez un moyen d'augmenter l'efficacité de la simulation à $3/17$ (vous savez le faire).
- d) Trouvez un moyen d'augmenter l'efficacité de la simulation à $6/17$ (difficile).
- e) Peut-on mieux faire avec la méthode de la transformée inverse ?

Séance 3

Simulation de l'interaction $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$

Au cours de cette séance d'exercices, nous allons simuler la réaction $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ à l'aide des générateurs de nombres aléatoires que nous avons appris à utiliser précédemment. Le premier exercice vous permet de calculer la section efficace théorique en partant des éléments de matrice. Dans le second exercice, il est demandé d'écrire le code de simulation. Nous allons générer des événements et étudier les caractéristiques de ceux-ci avec des histogrammes. Le dernier exercice permet aux plus rapides d'aller un peu plus loin dans les détails et/ou d'écrire le résultat dans des vrais fichiers d'événements simulés (dans un `ROOT tree`), qui pourraient être utilisés dans des analyses cinématiques.

1. Calcul de la section efficace $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$: Nous allons partir de la relation suivante vue au cours pour l'élément de matrice du processus (relation 3.6 du syllabus) :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 8 \frac{(4\pi)^2 \alpha^2}{s^2} N_c Q_q^2 \left\{ (p_{e^+} \cdot p_q)(p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}}) + (p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})(p_{e^-} \cdot p_q) + m_q^2 (p_{e^+} \cdot p_{e^-}) \right\},$$

ainsi que de la *règle d'or* dans le cas d'une interaction $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$:

$$d\sigma = |\overline{\mathcal{M}}|^2 \frac{J}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \dots \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_n),$$

où $p_i \equiv (E_i, \vec{p}_i)$ avec $E_i = \sqrt{m_i^2 + |\vec{p}_i|^2}$, et où J est un facteur statistique : $J = \frac{1}{j!}$ pour chaque groupe de j particules identiques dans l'état final.

- a) Simplifiez la règle d'or pour le cas particulier $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ dans le référentiel du centre de masse. Obtenez l'expression de $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, intégrée sur les impulsions. Vous devriez trouver :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{(8\pi)^2} \frac{J}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|}.$$

- b) Utilisez le résultat précédent et l'expression du carré de l'amplitude pour obtenir la section efficace de l'interaction $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$, différentielle en les variables angulaires de l'état final. Vous devriez obtenir l'expression suivante :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} N_c Q_q^2 \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}} \left\{ \left(1 + \frac{4m_q^2}{s}\right) + \left(1 - \frac{4m_q^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right\},$$

où s est le carré de l'énergie dans le système du centre de masse.

- c) Évaluez le résultat dans l'approximation des masses nulles.
 d) **[Devoir]** Redémontrez l'expression de $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ donnée ci-dessus à partir du diagramme de Feynman.

2. Simulation de l'interaction $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$: Nous allons à présent simuler la réaction (dans l'approximation des masses nulles) en utilisant l'expression de la section efficace différentielle obtenue à l'exercice 1c). Nous allons utiliser la méthode de réjection pour simuler les événements. Il est donc nécessaire de déterminer les différents éléments intervenant dans l'algorithme de génération.

- a) Déterminez le nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire le nombre de variables à tirer aléatoirement. Déterminez la valeur maximale de la section efficace pour une valeur fixée de s et pour une saveur de quarks donnée.
 b) Écrivez un code qui génère les événements suivant la distribution de la section efficace. Faites des histogrammes pour les variables cinématiques importantes (lesquelles sont-elles?). Calculez l'efficacité de la méthode de réjection.

- c) Observez la distribution de $\cos\theta$ et ajustez une fonction judicieusement choisie.
- d) Calculez la section efficace intégrée sur les variables angulaires, pour une valeur de s fixée et pour une saveur de quarks donnée. En sachant combien d'événements vous avez généré, déduisez-en la luminosité de l'échantillon que vous avez produit.

3. Pour aller plus loin (Devoir) : Vous pouvez faire l'une ou l'autre des questions proposées ci-dessous pour améliorer votre code (toutes les questions sont indépendantes).

- a) Dans la simulation que nous venons de faire, nous avons négligé les masses. Refaites la simulation en tenant compte de la masse des quarks produits. Comparez les différentes distributions obtenues pour les différentes saveurs de quarks. Comment pourrait-on produire des échantillons "réalistes" comprenant toutes les saveurs de quarks dans l'état final ?
- b) Calculez les quadri-vecteurs de chacune des particules dans l'état initial et final, et sauvegardez ces informations dans un `TTree`. Cela pourrait permettre d'utiliser vos événements générés pour écrire un code d'analyse ; par exemple, vous pouvez vous servir des informations des quadri-vecteurs pour faire l'histogramme d'autres grandeurs cinématiques comme la quantité de mouvement transverse des quarks ($p_T \equiv \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$).
- c) À partir de l'expression vue au cours (formule 3.18), refaites l'exercice 2 en vous plaçant sur le pôle du Z (on néglige la contribution du photon, ainsi que les corrections radiatives).

Séance 4

Simulation de l'interaction $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$

Dans la séance 3, nous avons simulé l'interaction $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$. Nous allons à présent ajouter la radiation d'un gluon par l'un des quarks. Cette séance est dédiée au calcul de la section efficace différentielle $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$.

Nous procéderons en deux parties. Tout d'abord, nous allons étudier le facteur d'espace des phases intervenant dans la règle d'or : il est en effet important de partir dans la bonne direction lorsqu'on traite un problème à plus de deux particules dans l'état final. Ensuite, nous utiliserons ce résultat, ainsi que la formule donnant les éléments de matrice (vue au cours), pour déterminer l'expression de la section efficace différentielle.

Important : pour cet exercice, nous négligerons toujours les masses des quarks (les étudiants très motivés peuvent essayer de les garder dans les calculs, nous leur souhaitons bon courage).

1. Paramétrisation de l'espace des phases pour une interaction $1+2 \rightarrow 3+4+5$: Le facteur d'espace des phases en 3 dimensions est donné par :

$$d\Phi_3 = \prod_{i=1}^3 \left(\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3),$$

où p_1 et p_2 sont les quadrivecteurs énergie-impulsion des particules dans l'état initial et k_1 , k_2 et k_3 ceux des particules dans l'état final.

a) Dans l'expression ci-dessus, utilisez le changement de variables suivant :

$$x_i = \frac{2E_i}{\sqrt{s}}$$

et obtenez une nouvelle expression pour les facteurs $\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3 2E_i}$. Vous devriez obtenir :

$$\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3 2E_i} = \frac{s}{8} \frac{1}{(2\pi)^3} x_i dx_i d\Omega_i,$$

où $d\Omega_i \equiv d \cos \theta_i d\phi_i$.

b) Sans se soucier de la conservation de l'énergie pour le moment (elle viendra lorsqu'on intégrera les facteurs en delta de Dirac), l'état final à 3 particules se décrit par 9 variables puisqu'on néglige les masses. Nous allons le paramétrer en 3 normes (x_1 , x_2 et x_3) et 6 angles. Pour ces 6 angles, nous allons prendre la convention suivante :

— 3 angles d'Euler suivant la convention $z - x - z$:

— $\alpha \in [0, 2\pi]$

— $\beta \in [0, \pi]$

— $\gamma \in [0, 2\pi]$,

tels qu'après les trois rotations d'Euler transformant le repère (x, y, z) en (X, Y, Z) , k_3 soit aligné sur l'axe des X et k_1 soit dans le plan XY avec $Y > 0$.

— 3 autres angles :

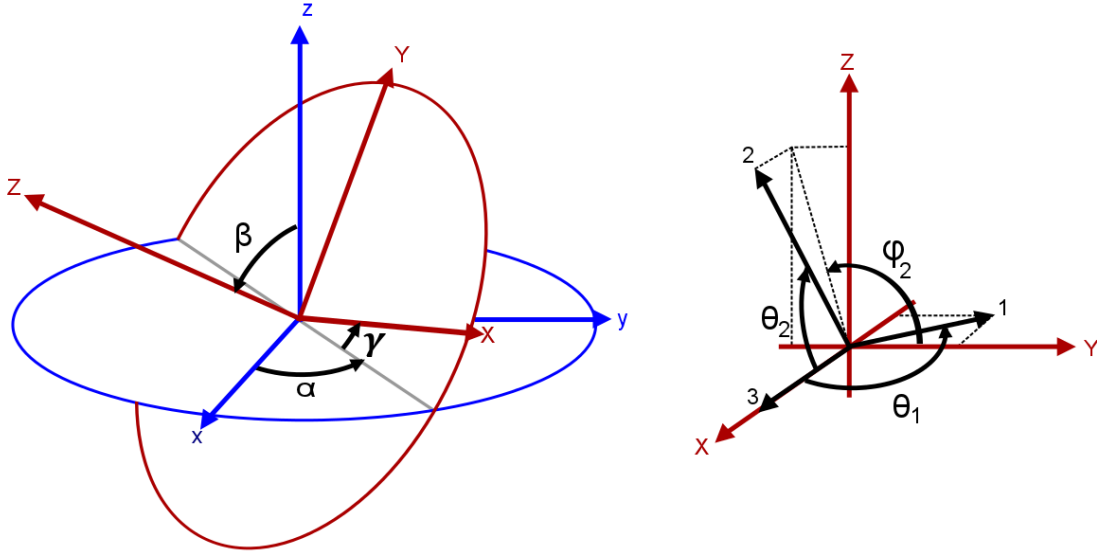
— $\theta_1 \equiv \theta_{13} \in [0, \pi]$

— $\theta_2 \equiv \theta_{23} \in [0, \pi]$

— $\phi_2 \in [0, 2\pi]$.

θ_1 et θ_2 sont des angles entre les impulsions des quarks (et sont les mêmes dans tous les référentiels), et ϕ_2 est l'angle azimutal de la deuxième particule par rapport à l'axe Y du référentiel obtenu après les 3 rotations d'Euler.

(Voir la figure ci-dessous pour une représentation schématique.)



Exprimez le delta de Dirac en fonction des x_i et des 6 angles, et insérez le résultat dans l'expression de $d\Phi_3$. Vous devriez obtenir :

$$d\Phi_3 = \frac{1}{(2\pi)^5} \left(\frac{s}{8}\right)^3 \frac{16}{s^2} d\alpha d\cos\beta d\gamma dx_1 dx_2 dx_3 d\cos\theta_1 d\cos\theta_2 d\phi_2 \delta(2 - x_1 - x_2 - x_3) x_1 x_2 x_3 \\ \times \delta(x_2 \sin\theta_2 \sin\phi_2) \delta(x_2 \sin\theta_2 \cos\phi_2 + x_1 \sin\theta_1) \delta(x_3 + x_2 \cos\theta_2 + x_1 \cos\theta_1).$$

c) Intégrez l'expression obtenue précédemment sur les variables x_3 , $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$ et ϕ_2 pour supprimer les delta de Dirac (autrement dit, imposez la conservation de l'énergie). Vous devriez obtenir :

$$d\Phi_3 = \frac{s}{32} \cdot \frac{1}{(2\pi)^5} \cdot dx_1 dx_2 d\alpha d\cos\beta d\gamma,$$

avec les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = -\frac{x_1^2 + x_3^2 - x_2^2}{2x_1 x_3} \\ \cos\theta_2 = -\frac{x_2^2 + x_3^2 - x_1^2}{2x_2 x_3} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \phi_2 = \pi. \end{cases}$$

d) Montrez qu'avec nos conventions pour les angles d'Euler, les produits entre les différents quadri-vecteurs sont donnés par :

$$p_1 \cdot k_1 = \frac{s}{4} x_1 (1 \mp \sin\beta \sin(\gamma + \theta_1)) \\ p_1 \cdot k_2 = \frac{s}{4} x_2 (1 \mp \sin\beta \sin(\gamma - \theta_2)) \\ p_1 \cdot k_3 = \frac{s}{4} x_3 (1 \mp \sin\beta \sin\gamma)$$

2. Calcul de la section efficace $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$: Maintenant que nous avons calculé l'élément d'espace des phases, nous pouvons passer au calcul de la section efficace différentielle. Pour rappel, la règle d'or pour une interaction $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n$ s'exprime comme :

$$d\sigma = \overline{|\mathcal{M}|^2} \frac{J}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \dots \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \dots - p_n),$$

où J est un facteur combinatoire : $J = \frac{1}{j!}$ pour chaque groupe de j particules identiques dans l'état final.

L'élément de matrice du processus a l'expression suivante (voir cours, pas démontrée ici) :

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 8C_F(4\pi)^3\alpha^2\alpha_s N_c Q_q^2 \left\{ \frac{(p_{e^+} \cdot p_q)^2 + (p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})^2 + (p_{e^-} \cdot p_q)^2 + (p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}})^2}{(p_{e^+} \cdot p_{e^-})(p_q \cdot p_g)(p_{\bar{q}} \cdot p_g)} \right\}.$$

- a) Combinez les différents résultats obtenus pour trouver l'expression de la section efficace différentielle en les variables x_1 , x_2 , α , $\cos \beta$ et γ , en termes des quadrivecteurs des particules et de l'énergie disponible dans le centre de masse. Vous devriez obtenir :

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2 d\alpha d\cos\beta d\gamma} = \frac{C_F\alpha^2\alpha_s N_c Q_q^2}{2\pi^2} \left\{ \frac{(p_{e^+} \cdot p_q)^2 + (p_{e^+} \cdot p_{\bar{q}})^2 + (p_{e^-} \cdot p_q)^2 + (p_{e^-} \cdot p_{\bar{q}})^2}{s(p_q \cdot p_g)(p_{\bar{q}} \cdot p_g)} \right\}.$$

- b) Utilisez les expressions des produits de quadrivecteurs calculés à l'exercice précédent pour simplifier le résultat ci-dessus. Vous devriez obtenir le résultat suivant :

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2 d\alpha d\cos\beta d\gamma} = \frac{C_F\alpha^2\alpha_s N_c Q_q^2}{4\pi^2} \left\{ \frac{x_1^2(1 + \sin^2\beta \sin^2(\gamma + \theta_1)) + x_2^2(1 + \sin^2\beta \sin^2(\gamma - \theta_2))}{s(1 - x_1)(1 - x_2)} \right\}.$$

- c) Est-il possible d'obtenir facilement l'expression analytique de la section efficace intégrée à partir de ce résultat ?

Séance 5

Simulation de l'interaction $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$ (suite)

Dans cette séance, nous utiliserons la méthode de réjection pour simuler des événements $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g$, à partir de l'expression de la section efficace différentielle que nous avons dérivée dans la séance précédente. Nous pourrons ensuite étudier quelques caractéristiques du processus physique et retrouver certains résultats du cours.

1. Méthode de réjection : La première chose à faire est de générer les variables aléatoires nécessaires. Il faut ensuite construire les quadri-vecteurs des particules. Étant donné que nous nous sommes placés dans un référentiel particulier pour étudier la cinématique et parvenir aux formules de la section efficace, nous devons maintenant parvenir à exprimer les quadri-vecteurs des différentes particules dans le référentiel du laboratoire. Une fois que tous nos quadri-vecteurs sont exprimés dans un même système, nous pouvons utiliser les formules de section efficace pour la méthode de réjection, et sauver les événements satisfaisant à la condition.

- a) Déterminez les variables à générer et leurs intervalles autorisés (attention aux divergences!). Construisez les quadri-vecteurs ainsi générés dans le référentiel défini par les angles d'Euler.
- b) Écrivez une fonction ayant comme arguments les trois angles d'Euler ainsi qu'un quadri-vecteur, qui effectue le passage du référentiel d'Euler à celui du laboratoire et qui modifie directement les composantes du quadri-vecteur passé en argument.
- c) Codez la formule de la section efficace ayant comme arguments les 5 quadri-vecteurs exprimés dans le référentiel du laboratoire. Écrivez la condition pour la méthode de réjection.
- d) Générez des événements simulant le processus étudié et remplissez des histogrammes avec les variables intéressantes. Que pensez-vous de l'efficacité de cette méthode? Trouvez une solution pour améliorer la simulation, peut-être qu'un changement de variable

$$y = -\ln(1 - x)$$

peut être utile.

2. Étude du processus physique : Maintenant que nous avons un générateur fonctionnel, il est temps d'étudier quelques caractéristiques du processus physique.

- a) Dans trois histogrammes, remplissez x_{\max} , x_{\min} et la valeur intermédiaire. Est-ce cohérent avec ce qui est attendu? Quel type de modèle avons-nous généré? Vous pouvez aussi remplir des histogrammes à 2 ou 3 dimensions avec les corrélations entre les 3 valeurs de x .
- b) Pour chaque événement, appliquer l'algorithme de Jade au niveau partonique afin de reconstruire les "jets". Quelles sont les fractions d'événements à 1, 2 ou 3 jets? Comment évoluent-elles avec le paramètre y_{cut} de l'algorithme de Jade?

